

非线性椭圆方程正解的全局和局部行为

——Gidas–Spruck 论文中文直译

B. Gidas J. Spruck

(中文逐字翻译稿)

目录

1	引言	2
2	基本恒等式与不等式——一个特殊情况	5
3	局部结果与孤立奇点的分类——一个特殊情形	15
4	整体结果——一个特殊情形	36
5	向量场和基本界——一般情况	42
6	全局与局部结果——一般情况	51

1 引言

本文研究非线性椭圆方程在 $\mathbb{R}^n (n > 2)$ 上的正解的局部和全局行为, 更广泛地研究 n 维黎曼流形上的行为。更具体地说, 我们研究了孤立奇点附近正解的行为, 并推导出一些 Liouville 类型的全局结果。

我们目前的研究源于对物理和几何相关具体方程的研究。我们最简单的全局结果是

定理 1.1. 令 $u(x)$ 是 $\mathbb{R}^n (n > 2)$ 中方程

$$\Delta u + u^\alpha = 0 \tag{1.1}$$

的非负 C^2 解, 其中

$$1 \leq \alpha < \frac{n+2}{n-2}, \tag{1.2}$$

那么 $u(x) \equiv 0$.

定理 1.1 的一个有趣特点是, 关于 $u(x)$ 在无穷远处的行为并未被假设。因此, 无穷可以是一个奇异点。定理 1.1 是定理 4.1 的一个特例, 而定理 4.1 又包含在定理 6.1 中。对于 $\alpha \leq \frac{n}{n-2}$, 定理 1.1 有一个初等证明 (参见 [4])。对于 $n = 3$, 方程 (1.1) 与天体物理中的恒星结构相关 (参见 [2])。情形 $\alpha = (n+2)/(n-2)$ (这与杨-米尔斯方程 ($n = 4$) 和微分几何 ($n > 2$) 相关) 会出现在其他地方 [1]。在这种情况下, $u(x)$ 并不完全等于零, 但被明确给出 (参见 [7], [4])。

另一个简单的全局结果是

定理 1.2. 设 M 是一个 Ricci 张量非负的 n 维 ($n > 2$) 完备黎曼流形, 则 M 上方程 $\Delta u + u^\alpha = 0$ ($1 \leq \alpha < \frac{n+2}{n-2}$) 的非负 C^2 解只有零解。

Yau [16] 关于完全黎曼流形上的调和函数的工作表明, 定理 1.2 中 Ricci 张量的条件是自然的。我们最简单的局部结果为

定理 1.3. 设 $u(x)$ 为 (1.1) 当中在 $0 < |x| \leq R$ 上的非负 C^2 解, 假设

$$\frac{n}{n-2} < \alpha < \frac{n+2}{n-2}, \tag{1.3}$$

那么要么 $x = 0$ 处的奇点是可去的, 要么 $u(x)$ 是整个球体 $|x| \leq R$ 上面的分布解, 并且这时候当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$u(x)|x|^{2/(\alpha-1)} \rightarrow C_0, \quad (1.4a)$$

其中

$$C_0 = \left\{ \frac{2(n-2)}{(\alpha-1)^2} \left(\alpha - \frac{n}{n-2} \right) \right\}^{1/(\alpha-1)}. \quad (1.4b)$$

更进一步, 如果 $x \rightarrow 0$ 并且 $x_i/|x| \rightarrow \zeta_i$, 那么

$$|x|^{(\alpha+1)/(\alpha-1)} u_{x_i}(x) \rightarrow -\frac{2}{\alpha-1} C_0 \zeta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

定理 1.3 是定理 3.3 和 3.4 的一个特例。更一般的结果见定理 6.4。已知方程 (1.1) 存在满足 (1.4) 的解 (参见 [7])。在附录 A 中, 我们分析了一个更一般方程 (例 1) 的球对称解。(1.1) 在孤立奇点附近的正解行为与 (1.4) 在 $1 < \alpha \leq n/(n-2)$ (参见 [8]) 时不同。这是 Serrin 结果适用的“经典”区域 [12], [13]。

我们对孤立奇点增长估计的一个应用是以下唯一性定理。

定理 1.4. 设 $u(x)$ 是方程

$$\Delta u + |x|^\sigma u^\alpha = 0 \quad \text{在} \quad x \in \mathbb{R}^n - \{0, \infty\} \quad (1.6)$$

的非负 C^2 解, 其中

$$\begin{aligned} 1 < \frac{n+\sigma}{n-2} < \alpha < \frac{n+2}{n-2}, \\ -2 < \sigma < 2, \\ \alpha &\neq \frac{n+2+2\sigma}{n-2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

我们假设 $u(x)$ 的两个孤立奇点在 $x = 0$ 和 $x = \infty$ 时是不可去的。那么必然,

$$u(x) = \frac{C_0}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \quad (1.8a)$$

其中

$$C_0 = \left\{ \frac{(2+\sigma)(n-2)}{(\alpha-1)^2} \left(\alpha - \frac{n+\sigma}{n-2} \right) \right\}^{1/(\alpha-1)}. \quad (1.8b)$$

在附录 A 中, 我们证明如果在 (1.7) 中省略条件 $\alpha \leq (n+2+2\sigma)/(n-2)$, 则 (1.8) 的唯一性不成立。对于 $\sigma = 0$, 定理 1.4 通过另一种方法在 [1] 中被确立。如果 $1 < \alpha < (n+2)/(n-2)$ 且 $\sigma \leq -2$ 或者 $\sigma \geq 2$, 那么方程 (1.6) 在 $\mathbb{R}^n$ 中没有正解, 无论是否存在孤立奇点 (参见推论 3.2 和附录 A)。我们渐近估计的其他应用见 [1]。

定理 1.1 和 1.3 基于以下结果, 为简化起见, 我们首先在 2, 3, 4 三节当中研究方程

$$\Delta u + b_j(x)u_j(x) + h(x)u^\alpha = 0 \quad \text{在 } \mathbb{R}^n (n > 2). \quad (1.9)$$

在 5, 6 节, 我们解决更一般的方程

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \tilde{b}_j(x)u_j(x) + f(x, u) = 0 \quad \text{在 } \mathbb{R}^n (n > 2) \quad (1.10)$$

并附有严格椭圆线性部分, 以及在一个完备的 n 为黎曼流形 M^n 上面研究方程

$$\Delta u + bu + f(x, u) = 0. \quad (1.11)$$

在 (1.11), Δ 是 M^n 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子, 而 b 是 M 上面的一个矢量场。对于我们的局部结果, 我们也可以允许对 ∇u 产生一定依赖。

我们的全局结果要求 M^n 的度量 g^{ij} , 或者定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的度量 $g^{ij} = a^{ij}(x)$ 具有非负的 Ricci 张量。这种条件对我们本地的结果来说并非必需。对于局部结果, 我们还允许 a^{ij} (或 Ricci 张量) 中存在一些奇点。总体而言, 我们的全局结果对系数 a^{ij} 和 b_j 的要求比局部结果更严格。但这是可以预料的, 因为即使是线性方程情况也是如此 (参见 [5], [14])。我们对 b_j (M^n 时为 b) 施加的精确条件和非线性的 f 将在正文中给出。我们结果的重要特点是允许 $f(x, u)$ 以 u^α ($\alpha < (n+2)/(n-2)$), 其中 $u \rightarrow \infty$ 。之前的技术 (参见 [12], [13]) 仅适用于“经典”区域 $\alpha < n/(n-2)$ 。

我们局部结果的特点如下。对于 (1.9) (或 (1.10)) 在 $0 < |x| \leq R$ 中且原点可能有奇点的正解, 我们推导出一个先验上界, 并建立一种特殊的哈纳克不等式形式。这些结果对于奇点的分类具有基础性。证明中使用的关键技术性 L_p 界限是通过从解构造出的特殊向量场获得的。这个向量场可能是本文中最重要的新器件。我们的证明 (一旦建立了适当的 L_p 界限) 基于标准的 De Giorgi-Nash-Moser 迭代论证。

我们向量场的基本形式出现在 Obata 的几何结果 [10] 关于 S^n 上通常度量的共形变形中。在第 2 和第 5 节中，我们分别介绍了方程 (1.9) 和 (1.11) 的向量场。向量场导致一些恒式（参见 (2.7) 和 (2.13) 方程 (1.9)，以及 (5.16)、(5.18) 方程 (1.11)），这些恒等式是我们大部分工作的基本。论文的组织结构见目录。

2 基本恒等式与不等式——一个特殊情况

这一节我们引入一个新工具去取得估计——一个和弱形式为

$$\int_{\Omega} \{\nabla \eta \cdot \nabla u - \eta(b_j u_j + h u^\alpha)\} dx = 0 \quad (2.1)$$

(其中, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集且 $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$) 的方程 (1.9) 的正解相关的几何矢量场.

我们引入一个新函数

$$w(x) = u^{-2/(n-2)},$$

它满足

$$\Delta w = \frac{1}{2} n w^{-1} |\nabla w|^2 - b_j w_j(x) + \frac{2}{n-2} h(x) w^{-((n-2)/2)(\alpha-n/(n-2))}. \quad (2.2)$$

我们定义一个矢量场 $\mathbf{V}$ ，其分量为

$$V^i(x) = w^{-(n-1)} \left\{ w_{ij} w_j - \frac{1}{n} w_i \Delta w \right\}. \quad (2.3a)$$

利用 $u(x)$ 写出来，就是

$$V^i = \frac{2}{(n-2)^2} \left\{ (u^{-2/(n-2)} |\nabla u|^2) + (n-2)(u^{-2/(n-2)})_i |\nabla u|^2 + \frac{2h(x)}{n(\alpha + (n-4)/(n-2))} (u^{\alpha+(n-4)/(n-2)})_i + \frac{2}{n} b_j(x) u^{-2/(n-2)} u_j u_i \right\}. \quad (2.3b)$$

这里下标表示偏导数，重复指标被求和.

直接计算可以得到

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = w^{-(n-1)} \left\{ w_{ij} w_{ij} - \frac{1}{n} (\Delta w)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n-1}{n} \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right) h(x) w^{-((n-2)/2)(\alpha+n/(n-2))} |\nabla w|^2 \\
& + \frac{2(n-1)}{n(n-2)} h_{x_i}(x) w^{-((n-2)/2)(\alpha+n/(n-2))} w_i \\
& - \frac{n-1}{n} b_j w^{-n} w_j |\nabla w|^2 - \frac{n-1}{n} w^{-(n-1)} w_i \frac{\partial}{\partial x_i} (b_j w_j) \quad (2.4a) \\
& = J(x) + \frac{4(n-1)}{n(n-2)^2} \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right) h(x) u^{\alpha-n/(n-2)} |\nabla u|^2 \\
& - \frac{4(n-1)}{n(n-2)^2} h_{x_i}(x) u^{\alpha-2/(n-2)} u_i \\
& + \frac{4(n-1)(n+2)}{n(n-2)^3} b_j u^{-n/(n-2)} u_j |\nabla u|^2 \\
& - \frac{4(n-1)}{n(n-2)^2} u^{-2/(n-2)} u_i (b_j u_j)_i \quad (2.4b)
\end{aligned}$$

其中

$$J(x) = w^{-(n-1)} \left\{ w_{ij} w_{ij} - \frac{1}{n} (\Delta w)^2 \right\}. \quad (2.5)$$

我们注意到,

$$J(x) = w^{-(n-1)} \left(w_{ij} - \frac{1}{n} \Delta w \delta_{ij} \right)^2 \geq 0.$$

对于 $\alpha \leq (n+2)/(n-2)$, (2.4) 的第二部分也是非负的.

下文命题 2.1 中的恒等式对于本节及接下来两节的大部分工作来说都是基本的。本节及接下来两节中的所有积分都将相对于 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度进行。

命题 2.1. 设 u 是 (2.1) 的非负 C^2 解, 且 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界开集. 设 $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$

而 γ 是一个实数. 那么

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(n-2)^2 \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma} J(x) \\
& + \frac{n+2}{n} \left\{ \frac{2(n-1)}{n+2} \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right) - \gamma \right\} \int_{\Omega} \eta h(x) u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 \\
& + \gamma(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\
& = \int_{\Omega} \Delta \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 \\
& - \frac{2}{n} \int_{\Omega} \eta_i h u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta h_{x_i} u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i \\
& + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta h b_j u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_j + 2(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma-n/(n-2)} u_i |\nabla u|^2 \\
& - \left[\frac{2(n-1)}{n-2} - 3\gamma \right] \int_{\Omega} \eta b_j u^{-\gamma-n/(n-2)} u_j |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega} \eta_i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j \\
& + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta b_i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

注记. 如果 $\eta(x) \geq 0$, 并且 $\gamma \in (0, 1)$ 足够小, 则 (2.7) 左侧的每个项都是非负的 (本文中我们始终假设 $\alpha < (n+2)/(n-2)$). 考虑到 (2.7) 的后续应用, 我们将包含 η 导数的项称为“曲面”项, 其他项称为“体积”项。

命题 2.1 的证明 根据散度定理, 我们有

$$\int_{\Omega} \nabla(\eta u^{-\gamma} \mathbf{V}) \equiv \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma} \nabla \cdot \mathbf{V} - \gamma \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-1} u_i V^i + \int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma} V^i = 0. \tag{2.8}$$

利用 (2.4b)、方程 (1.9) 以及散度定理, 我们得到

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(n-2)^2 \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma} \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= J + \frac{2(n-1)}{n} \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right) \int_{\Omega} \eta h u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 \\
&\quad - \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta h_{x_i} u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i \\
&\quad + \frac{2(n-1)}{n} \left(\frac{n}{n-2} - \gamma \right) \int_{\Omega} \eta b_j u^{-\gamma-n/(n-2)} u_j |\nabla u|^2 \\
&\quad - \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta h b_j u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_j - \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta b_i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j \\
&\quad + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta_i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中

$$J = \frac{1}{2}(n-2)^2 \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma} J(x). \tag{2.10}$$

利用 (2.3b), 方程 (1.9), 和散度定理, 我们发现

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(n-2)^2 \gamma \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-1} u_i \\
&= -\frac{n+2}{n} \gamma \int_{\Omega} \eta h u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 + \gamma(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^2 \\
&\quad + \gamma \int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma-n/(n-2)} u_i |\nabla u|^2 - \frac{n+2}{n} \gamma \int_{\Omega} \eta b_j u^{-\gamma-n/(n-2)} u_j |\nabla u|^2.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

类似的,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(n-2)^2 \int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma} V^i &= - \int_{\Omega} \Delta \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 - (2-\gamma) \int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma-n/(n-2)} u_i |\nabla u|^2 \\
&\quad + \frac{2}{n} \int_{\Omega} \eta_i h u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i + \frac{2}{n} \int_{\Omega} \eta_i b_j u^{-2/(n-2)-\gamma} u_i u_j.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

将 (2.8) 与 (2.12) 结合, 我们很快得到 (2.7)。我们还需要以下命题 2.1 的替代形式。

命题 2.2. 设 Ω, η 还像命题 2.1 当中那样, 更进一步, 设 $\gamma \neq \alpha + (n-4)/(n-2), \gamma \neq -2/(n-2)$. 那么由 (2.10) 定义的 J ,

$$\begin{aligned}
& J + \frac{n+2}{n} \left\{ \frac{2(n-1)}{n+2} \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right) - \gamma \right\} \int_{\Omega} \eta h u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 \\
& \quad + \gamma(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta \eta u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\
& = \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta h_{x_i} u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i \\
& \quad - \frac{2}{n(\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma)(\gamma + 2/(n-2))} \\
& \quad \times \left[\frac{2(n-1)(n+1)}{n-2} - (2n+1)\gamma \right] \int_{\Omega} \eta (b_i h_i + b_{j,j} h) u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\
& \quad + \frac{2}{n(\gamma + 2/(n-2))} \left[\frac{(n-1)n}{n-2} - \frac{3n}{2}\gamma \right] \int_{\Omega} \eta b_{j,j} u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 \\
& \quad - \frac{4}{n(\gamma + 2/(n-2))} \int_{\Omega} \eta \left\{ \left[\frac{(n-1)n}{n-2} - \frac{3n}{2}\gamma \right] b_{j,i} \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{(n-1)(n+1)}{n-2} - \frac{2n+1}{2}\gamma \right] b_i b_j \right\} u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j \\
& \quad + \frac{1}{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma} \left[\frac{2}{n} + \frac{4(1-\gamma)}{\gamma + 2/(n-2)} \right] \int_{\Omega} \Delta \eta h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\
& \quad + \frac{4}{n(\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma)(\gamma + 2/(n-2))} \int_{\Omega} \eta_i \left\{ \left[\frac{(n-1)^2}{n-2} - \frac{2n-1}{2}\gamma \right] h_i \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{(n-1)(n+1)}{n-2} - \frac{2n+1}{2}\gamma \right] b_i h \right\} u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\
& \quad - \frac{2(n-3)/(n-2) - 3\gamma}{\gamma + 2/(n-2)} \int_{\Omega} \Delta \eta^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 + \frac{2}{n(\gamma + 2/(n-2))} \\
& \quad \times \left[\frac{(n-1)n}{n-2} - \frac{3n}{2}\gamma \right] \int_{\Omega} \eta_i b_i u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 + \frac{4(1-\gamma)}{\gamma + 2/(n-2)} \\
& \quad \times \int_{\Omega} \eta_{ij} u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j - \frac{8}{\gamma + 2/(n-2)} \left[\frac{n-1}{n-2} - \gamma \right] \int_{\Omega} \eta_i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 $b_{j,i}(x) = \partial b_j / \partial x_i$.

命题 2.2 的证明需要如下的引理.

引理 2.1. 设 Ω 和 γ 像命题 2.1 当中一样, 并设 $Z \in C_0^\infty(\Omega)$ 是有着分量 Z^i 的矢量场, 那么

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Z^i (u^{-\gamma-2/(n-2)})_i |\nabla u|^2 &= \int_{\Omega} \operatorname{div} Z u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} Z_j^i u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j - \frac{2}{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma} \\ &\quad \times \int_{\Omega} (\operatorname{div} Z + Z^i h_i) u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} Z^i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j. \end{aligned} \quad (2.14)$$

证明 根据公式 (2.1),

$$\int_{\Omega} \{-(Z^i u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i)_j u_j + Z^i u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i (b_j u_j + h u^\alpha)\} = 0. \quad (2.15)$$

我们发现, 其中

$$\begin{aligned} (Z^i u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i)_j u_j &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (Z^i u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} Z_i^i u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} Z^i (u^{-\gamma-2/(n-2)})_i |\nabla u|^2 + Z_j^i u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j, \end{aligned} \quad (2.16)$$

并且

$$\begin{aligned} Z^i u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i h u^\alpha &= \frac{1}{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (Z^i h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma}) \right. \\ &\quad \left. - (Z_i^i h + Z^i h_i) u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

对比 (2.15) - (2.17) 就得到了 (2.14) .

注记. 公式 (2.14) 和他的证明类似于著名的 Pokhazaev 恒等式 (参见 [11]) .

命题 2.2 的证明 恒等式 (2.13) 由 (2.7) 通过调整右边的项如下:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_i h u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i \\ = - \frac{1}{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma} \int_{\Omega} (\Delta \eta h + \eta_i h_i) u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \eta h b_j u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_j \\ &= -\frac{1}{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma} \int_{\Omega} (\eta_i h b_j + \eta h_j b_j + \eta h b_{j,j}) u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

而中间的项

$$\int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma-n/(n-2)} |\nabla u|^2 = -\frac{1}{\gamma + 2/(n-2)} \int_{\Omega} \eta_i (u^{-\gamma-2/(n-2)})_i |\nabla u|^2 \quad (2.20)$$

且

$$\int_{\Omega} \eta b_j u^{-\gamma-n/(n-2)} u_j |\nabla u|^2 = -\frac{1}{\gamma + 2/(n-2)} \int_{\Omega} \eta b_j (u^{-\gamma-2/(n-2)})_j |\nabla u|^2 \quad (2.21)$$

就是在 (2.14) 当中分别取 $Z^i = \eta_i$ 和 $Z^i = \eta b_i$. 将上述修改代入 (2.7) 后, 得到 (2.14)。

接下来我们推导局部问题的基本界限。在论文其余部分, c 表示严格正常数, 且可能发生变化。

命题 2.3. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n (n > 2)$ 的有界开集, 设

$$\begin{aligned} \zeta(x) &\in C_0^\infty(\Omega), \\ 0 &\leq \zeta(x) \leq 1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

(a) 对于 $n \geq 4$, 假设

$$\frac{2}{n-2} < \alpha < \frac{n+2}{n-2}, \quad (2.23)$$

$$0 < \gamma < \min \left\{ 1, \frac{2(n-1)}{n+2} \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right), \alpha - \frac{2}{n-2} \right\}. \quad (2.24)$$

那么存在严格正常数 c 满足对于大的 p ,

$$\begin{aligned} J + c \int_{\Omega} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} + c \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\ \leq c \int_{\Omega \cap \text{supp } \zeta} (|\nabla \zeta|^2 + |\nabla \log h|^2 + |b|^2)^{(2\alpha-2/(n-2)-\gamma)/(\alpha-1)} \\ \times h^{-(\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)} \\ + c \int_{\Omega \cap \text{supp } \zeta} [(|\Delta \zeta|^2 + |\nabla \zeta|^2)^2 + |\nabla \zeta|^2 |b|^2 + |b|^4]^{(2\alpha-2/(n-2)-\gamma)/2(\alpha-1)} \\ \times h^{-(\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

(b) 对于 $n = 3$, 假设 $2 < \alpha < 5$, 那么对于严格正常数 c 和 $p > 2$,

$$\begin{aligned} J + c \int_{\Omega} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2} &\leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-1} [|\nabla \zeta|^2 + |\nabla \zeta| |\nabla \log h| + |\nabla \zeta| |b| + |\nabla \log h|^2 \\ &\quad + |\nabla \log h| |b| + |\nabla b| + |b|^2] h u^{\alpha-1} \\ &\quad + c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} \{ |D^2 \zeta| + |\nabla \zeta| |b| + |Db| + |b|^2 \} u^{-2} |\nabla u|^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中 $|D^2 \zeta|$ 和 $|Db|$ 分别是 ζ_{ij} 和 $b_{j,i}$ 的范数.

证明 我们先考虑 $n \geq 4$ 的情形, 我们对 $\eta = \zeta^p$ 使用 (2.7), 我们需要利用杨不等式

$$ab \leq \theta^r \frac{a^r}{r} + \frac{1}{\theta^s} \frac{b^s}{s}, \quad (2.27a)$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1. \quad (2.27b)$$

限制 (2.7) 右边各项. 取 $p > 4$ 就有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 &= \int_{\Omega} \{ p \zeta^{p-1} \Delta \zeta + p(p-1) \zeta^p |\nabla \zeta|^2 \} u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 \\ &\leq c \theta^2 \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\ &\quad + \frac{c}{\theta^2} \int_{\Omega} \zeta^{p-4} (|\Delta \zeta| + |\nabla \zeta|^2)^2 u^{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

以类似的方式进行, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_i h u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} &\leq p \int_{\Omega} \zeta^{p-1} |\nabla \zeta| h u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} |\nabla u| \\ &\leq c \theta^2 \int_{\Omega} \zeta^p h u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 + \frac{c}{\theta^2} \int_{\Omega} \zeta^{p-2} |\nabla \zeta|^2 h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta h b_j u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i &\leq c \theta^2 \int_{\Omega} \zeta^p h u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 \\ &\quad + \frac{c}{\theta^2} \int_{\Omega} \zeta^p |\nabla \log h|^2 h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta h b_j u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_j &\leq c\theta^2 \int_{\Omega} \zeta^p h u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 \\ &\quad + \frac{c}{\theta^2} \int_{\Omega} \zeta^p h |b|^2 u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma-n/(n-2)} u_i |\nabla u|^2 &+ \int_{\Omega} \eta b_j u^{-\gamma-n/(n-2)} u_j |\nabla u|^2 \\ &\leq c\theta^{4/3} \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\ &\quad + \frac{c}{\theta^4} \int_{\Omega} \zeta^{p-4} (|\nabla \zeta|^4 + |b|^4) u^{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j &+ \int_{\Omega} \eta b_i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j \\ &\leq c\theta^2 \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\ &\quad + \frac{c}{\theta^2} \int_{\Omega} \zeta^{p-2} (|\nabla \zeta|^2 |b|^4 + |b|^4) u^{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

把 (2.28) - (2.33) 代入 (2.7), 我们发现对于足够小的 $\theta (c > 0)$,

$$\begin{aligned} J + c \int_{\Omega} \zeta^p h u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 &+ c \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\ &\leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} (|\nabla \zeta|^2 + |\nabla \log h|^2 + |b|^2) h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\ &\quad + c \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [(|\Delta \zeta| + |\nabla \zeta|^2)^2 + |\nabla \zeta|^2 |b|^2 + |b|^4] u^{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

我们现在需要如下引理.

引理 2.2. 设 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, 那么

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{2}{n-2} - \gamma \right) \int_{\Omega} \varphi(x) u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 \\ = \int_{\Omega} \varphi(x) j u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} - \int_{\Omega} \varphi_i u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i + \int_{\Omega} \varphi b_j u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_j. \end{aligned} \quad (2.35)$$

证明 直接在 (2.1) 当中取 $\eta = \varphi u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma}$ 即可.

我们在 (2.35) 中取 $\varphi(x) = \eta h = \zeta^p h$ 并代入 (2.34) . 另一个 (2.29) - (2.31) 的应用得到

$$\begin{aligned}
& J + c \int_{\Omega} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} + c \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\
& \leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} (|\nabla \zeta|^2 + |\nabla \log h|^2 + |b|^2) h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\
& \quad + \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [(|\Delta \zeta| + |\nabla \zeta|^2)^2 + |\nabla \zeta|^2 |b|^2 + |b|^4] u^{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

对于满足 (2.24) 的 γ 和足够大的 p , 我们可以利用 (2.27) 得到界

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \zeta^{p-2} (|\nabla \zeta|^2 + |\nabla \log h|^2 + |b|^2) h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\
& \leq c \theta^{q_1} \int_{\Omega} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} \\
& \quad + \frac{c}{\theta^{q'_1}} \int_{\Omega} (|\nabla \zeta|^2 + |\nabla \log h|^2 + |b|^2)^{(2\alpha-2/(n-2)-\gamma)/(\alpha-1)} \\
& \quad \times h^{-(\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

以及 ($n \geq 4$)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [(|\Delta \zeta| + |\nabla \zeta|^2)^2 + |\nabla \zeta|^2 |b|^2 + |b|^4]^{-\gamma\alpha-2/(n-2)-\gamma)/2(\alpha-1)} \\
& \leq c \theta^{q_2} \int_{\Omega} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} \\
& \quad + \frac{c}{\theta^{q'_2}} \int_{\Omega} [(|\Delta \zeta| + |\nabla \zeta|^2 + |\nabla \zeta|^2 |b|^2 + |b|^4]^{(2\alpha-2/(n-2)-\gamma)/2(\alpha-1)} \\
& \quad \times h^{-(\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)},
\end{aligned} \tag{2.38}$$

其中

$$\frac{1}{q_1} = \frac{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma}{2\alpha - 2/(n-2) - \gamma}, \quad \frac{1}{q'_1} = 1 - \frac{1}{q_1} = \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 2/(n-2) - \gamma} \tag{2.39}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\gamma + 2(n-3)/(n-2)}{2\alpha - 2/(n-2) - \gamma}, \quad \frac{1}{q'_2} = 1 - \frac{1}{q_2} = \frac{2(\alpha - 1)}{2\alpha - 2/(n-2) - \gamma}. \tag{2.40}$$

选择足够小的 θ , (2.36) - (2.38) 就可以得到 (2.25) .

接下来我们考虑 $n = 3$ 的情况, 并证明 (2.26). 在这个情况下, 我们对 $\gamma = 0$ 和 $n = 3$ 使用 (2.13). 恒等式 (2.13) 和 (2.29) 的另一个应用, 得到

$$\begin{aligned}
J + c \int_{\Omega} \zeta^p h u^{\alpha-3} |\nabla u|^2 \\
\leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-1} [|\nabla \zeta| |\nabla \log h| + |\nabla \zeta| |b| + |\nabla \log h|^2 + |\nabla \log h| |b| + |\nabla b|] h u^{\alpha-1} \\
+ c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} [|D^2 \zeta| + |\nabla \zeta| |b| + |Db| + |b|^2] u^{-2} |\nabla u|^2.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

对 $\gamma = 0, n = 3$ 利用引理 2.2, 得到了 (2.41), 并结合 (2.29) - (2.31), 我们得到 (2.26).

注记. 除了 (2.38) 外, (2.25) 证明中的所有步骤在 $n = 3$ 时也成立, 前提是 $0 < \gamma$ 足够小. 界限 (2.38) 失败, 因为 q_2 在 $n = 3$ 时为 0. 正是因为这个步骤, 我们不得不采取 (2.13).

3 局部结果与孤立奇点的分类——一个特殊情形

本节研究 (1.9) 正解的局部行为, 并分类其孤立奇点. 我们首先推导一个上界和一种特殊形式的哈纳克不等式, 适用于可能存在孤立奇点的正解, 比如原点. 这一结果对推导所有后续结果具有基本重要意义.

定理 3.1. 设 $u(x)$ 是 $0 < |x| \leq R$ 上方程 (1.9) 的一个 C^2 正解, 其中 $1 < \alpha < (n+2)/(n-2)$. 我们假设 $h(x)$ 是 $0 < |x| \leq R$ 上面一个满足

$$c_1 |x|^\sigma \leq h(x) \leq c_2 |x|^\sigma \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近} \tag{3.1a}$$

$$|\nabla \log h| \leq \frac{c}{|x|}, \tag{3.1b}$$

其中 c_1, c_2, c 是正常数, 而 σ 是任何一个实数. 我们假设对于 $n \geq 3$,

$$|b_j(x)| \leq \frac{c}{|x|} \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}, \tag{3.2}$$

而 $n = 3$ 时

$$|\nabla b_j(x)| \leq \frac{c}{|x|^2} \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}. \tag{3.3}$$

那么

(i) 存在一个正常数 c 满足

$$u(x) \leq \frac{c}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \quad \text{在 } x=0 \text{ 附近};$$

(ii) (哈纳克不等式) 存在 θ_0 满足对于任意 $0 < \theta \leq \theta_0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}R$,

$$\sup_{\varepsilon \leq |x| \leq (1+\theta)\varepsilon} \leq c \inf_{\varepsilon \leq |x| \leq (1+\theta)\varepsilon} u(x), \quad (3.5)$$

其中 c 不依赖 ε, θ 和 u .

注记. 1. 我们声名 (3.3) 对 $n=3$ 是不必须的;

2. 条件 (3.1b) 和 (3.2) 可以被合适的积分条件取代;

3. 有趣的是, 对于 $\sigma = -2$, 函数 $u(x)$ 在奇点处有界, 而当 $\sigma < -2$ 的时候, $x \rightarrow 0$ 时 $u(x) \rightarrow 0$ (参见下面的推论 3.2);

4. 对于 $1 < \alpha < (n+\sigma)/(n-2)$, 估计式 (3.4) 可以整体上被改进. 对于附录 A 例 1 当中处理的方程, 我们指出 $u(x) \leq c/|x|^{n-2}$. 利用 [8] 当中方程 (1.1) .

为了证明定理 3.1 以及其他很多结果, 我们需要一些技术引理.

引理 3.1. 在定理 3.1 的假设下, 对于 $n \geq 4$,

$$\int_{\varepsilon < |x| < R/2} h^2(x) u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} \leq \frac{c}{\varepsilon(2/(\alpha-1))(2\alpha-2/(n-2)-\gamma)} \cdot \begin{cases} \varepsilon^{n-\sigma(-\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)}, \\ \text{对于 } n - \sigma \frac{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}{\alpha-1} < 0; \\ R^{n-\sigma(-\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)} \\ \text{对于 } n - \sigma \frac{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}{\alpha-1} > 0, \end{cases} \quad (3.6a)$$

其中 γ 是严格正但是非常小的. 对于 $n=3$, 我们有

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R/2} h^2 u^{2\alpha-2} \leq \frac{c}{\varepsilon}. \quad (3.6b)$$

证明 我们对

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{4}\varepsilon \leq |x| \leq R\}$$

使用命题 2.3, 其中

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } \varepsilon \leq |x| \leq \frac{1}{2}R; \\ 0 & \text{for } |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, |x| \geq \frac{3}{4}R, \end{cases} \quad (3.7a)$$

$$\|\nabla \zeta\|_\infty \leq \frac{c}{\varepsilon}, \quad \|D^2 \zeta\|_\infty \leq \frac{c}{\varepsilon^2}. \quad (3.7b)$$

那么对于 $n \geq 4$, (2.25) 指出 (利用 (3.1b) 和 (3.2))

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R/2} h^2 u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} \\ & \leq \frac{C}{\varepsilon^{(2/(\alpha-1))(2\alpha-2/(n-2)-\gamma)}} \\ & \quad \times \int_{\{\varepsilon/2 \leq |x| \leq \varepsilon\} \cup \{3R/4 \leq |x| \leq R\}} h^{-(\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)} \\ & \quad + \frac{C}{\varepsilon^{(2/(\alpha-1))(2\alpha-2/(n-2)-\gamma)}} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} h^{-(\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

这个公式和 (3.1a) 一起可以推出 (3.6a) .

对于 $n = 3$, (2.26) 给出 (利用 (3.1b) - (3.3))

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R/2} \leq \frac{c}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon/2 \leq |x| \leq \varepsilon} \zeta^{p-2} \{hu^{\alpha-1} + u^{-2}|\nabla u|^2\} \\ & \quad + \frac{c}{R^2} \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} \{hu^{\alpha-1} + u^{-2}|\nabla u|^2\} \\ & \quad + c \int_{\varepsilon/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} \frac{1}{|x|^2} \{hu^{\alpha-1} + u^{-2}|\nabla u|^2\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9) 右边最后一项是决定性的. 为了估计它, 我们在 (2.1) 当中取测试函数 $\eta =$

$\zeta^{p-2}(1/|x|^2)u^{-1}$, 得到

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} \frac{1}{|x|^2} \{hu^{\alpha-1} + u^{-2}|\nabla u|^2\} \\
&= (p-2) \int_{\varepsilon/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-3} \zeta_j \frac{1}{|x|^2} u^{-1} u_j \\
&\quad - \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} \frac{1}{|x|^2} b_j u_j u^{-1} - 2 \int_{\varepsilon/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} \frac{x_j}{|x|^4} u^{-1} u_j \\
&\leq c\theta^2 \int_{\varepsilon/2 \leq |x| \leq R} \zeta^p \frac{1}{|x|^2} u^{-2} |\nabla u|^2 \\
&\quad + \frac{c}{\theta^2} \int_{\varepsilon/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-4} \frac{1}{|x|^2} \left\{ |\nabla \zeta|^2 + |b|^2 + \frac{1}{|x|^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

再次选择足够小的 θ 并利用 (3.2) 和 (3.7) 我们得到

$$\int_{\varepsilon/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} \frac{1}{|x|^2} \{hu^{\alpha-1} + u^{-2}|\nabla u|^2\} \leq \frac{c}{\varepsilon}. \tag{3.11}$$

结合 (3.9) - (3.11) 我们得到了 (3.6b), 也就证明了引理.

推论 3.1. 在定理 3.1 的假设下, 对于 $1 < \alpha < (n+2)/(n-2), M > 1$,

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq M\varepsilon} (hu^{\alpha-1})^{n/(2-\delta)} dx \leq c(M, \delta) \varepsilon^{-n\delta/(2-\delta)}, \tag{3.12}$$

其中 $0 < \delta \leq 1 (n \geq 4)$ 或者 $\delta = 1/2 (n = 3)$.

证明 对于 $n \geq 4$, (3.12) 可以直接对 (3.6a) 利用赫尔德不等式, 这是因为 $0 < \delta \leq 1$ 的时候, $(\alpha-1)n/(2-\delta) < 2\alpha-2/(n-2) - \gamma$. 而对 $n = 3, \delta = 1/2$ 的情况, (3.12) 就是 (3.6b).

定理 3.1 的证明 我们想象 $u(x)$ 是线性方程

$$\Delta u + b_j u_j + d(x)u = 0 \tag{3.13}$$

的解, 其中 $d(x) = h(x)u^{\alpha-1}$. 设 $B_R(x_0)$ 是圆心在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 而半径为 R 的球. 根据一个熟知的结果 (参见 [15]), (3.13) 的任何正的 $W^{1,2}$ 解都满足

$$\sup_{B_{R/2}(x_0)} u(x) \leq CR^{-n/p} \|u\|_{L_p(B_R(x_0))} \quad \text{对于任意 } p > 1, \tag{3.14}$$

其中常数 C 依赖

$$R^\delta \|d\|_{L_{n/(2-\delta)}(B_R(x_0))} \quad \text{和} \quad R^\delta \|b\|_{L_{n/(1-\delta)}(B_R(x_0))}, \quad 0 < \delta < 1,$$

(并且显然依赖 n 和 p)。假设 $x_0 \neq 0$ 并设 $R = \frac{1}{2}|x_0|$ 。那么根据引理 3.1,

$$R^\delta \|d\|_{L_{n/(2-\delta)}(B_R(x_0))} \leq R^\delta \left(\int_{R \leq |x| \leq 3R} (u^{\alpha-1})^{n/(2-\delta)} dx \right)^{(2-\delta)/n} \quad (3.15)$$

在小的 $|x_0|$ 的时候是一致有界的. 类似的, 由于 $|b| \leq c/|x|$,

$$R^\delta \|b\|_{L_{n/(1-\delta)}(B_R(x_0))} \leq R^\delta \left(\int_{R \leq |x| \leq 3R} |b|^{n/(1-\delta)} dx \right)^{(1-\delta)/n} \quad (3.16)$$

也在 $R = \frac{1}{2}|x_0|$ 足够小的时候一致有界. 这样对于足够小的 $R = \frac{1}{2}|x_0|$, (3.14) 意味着

$$\sup_{B_{R/2}(x_0)} u(x) \leq C|x_0|^{-n/p} \left(\int_{|x_0|/2 \leq |x| \leq 3|x_0|/2} u^p dx \right)^{1/p}, \quad p > 1. \quad (3.17)$$

对于 $n \geq 4$, 我们需要令 $p = 2\alpha - 2/(n-2) - \gamma$, 由于对于足够小的 γ 有 $2\alpha - 2(n-2) - \gamma > 1$, 这样, 根据引理 3.1 和 (3.1a),

$$|x_0|^{-n/p} \left(\int_{|x_0|/2 \leq |x| \leq 3|x_0|/2} u^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{c}{|x_0|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}.$$

因此

$$u(x_0) \leq \frac{c}{R^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} = \frac{c}{|x_0|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}},$$

也就证明了 $n \geq 4$ 情况的 (3.4). 对于 $n = 3$, 选择 $p = 2\alpha - 2$ (参见 (3.6b)) 会带来困难, 因为 $p > 1$ 要求 $\alpha > 3/2$. 因为这个原因, 我们按照如下操作: 因为

$$\Delta u + b_j u_j = -h(x)u^\alpha \leq 0,$$

任何 (1.9) 的正解都是一个线性椭圆方程的超解. 那么 u 满足弱哈纳克不等式 (参见 [6],[15])

$$\inf_{B_{R/2}(x_0)} u(x) \geq \frac{c}{R^{n/p}} \left(\int_{B_R(x_0)} u^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{对于任意 } \frac{n}{n-2} > p > 0. \quad (3.18)$$

从中我们可以估计任何 $L_p(0 < p) n/(n-2)$, 均基于任意 L_q 估计, 例如 $q = 2\alpha - 2$, 具体如下: 显然,

$$\frac{1}{R^{n/q}} \left(\int_{B_{R/2}(x_0)} u^q \right)^{1/q} \geq c \inf_{B_{R/2}(x_0)} u, \quad q > 0,$$

以及通过 (3.18)

$$\frac{1}{R^{n/p}} \left(\int_{B_{R/2}(x_0)} u^q \right)^{1/q} \geq c \inf_{B_{R/2}(x_0)} u \geq \frac{c}{R^{n/p}} \left(\int_{B_R(x_0)} u^p \right)^{1/p}, \quad \frac{n}{n-2} > q > 0.$$

选择 $q = 2\alpha - 2$ 和 $1 < p < n/(n-2) = 3$, 那么通过引理 3.1,

$$\frac{1}{R^{n/p}} \left(\int_{B_R(x_0)} u^p \right)^{1/p} \leq c \frac{1}{R^{2/(2\alpha-2)}} \left(\frac{1}{R^{1+2\sigma}} \right)^{1/(2\alpha-2)} = \frac{c}{R^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}.$$

它和 (3.14) 一起得到 $n = 3$ 情况的 (3.4), 也就结束了定理 (i) 部分.

哈纳克不等式 (3.5) 可以通过结合 (3.14) 和 (3.18) 并取 $1 < p = q < n/(n-2)$ 和 $R = |x_0|/2$ 足够小得到, 并且对足够小的 ε 利用 $\text{环 } \varepsilon \leq |x| \leq (1+\theta)\varepsilon \text{ 的标准覆盖论证得到}$. 通过 (3.15) 和 (3.16), 常数 c 是一致有界的. 这就证明了定理.

推论 3.2. 在定理 3.1 的假设下, 如果 $\sigma < -2$, 那么 $u(x) \equiv 0$.

证明 通过 (3.4),

$$u(x) \rightarrow 0 \quad \text{其中 } x \rightarrow 0; \quad (3.19)$$

因为

$$\Delta u + b_j u_j = -h u^\alpha \leq 0$$

且 $u(x) \geq 0$, 利用最大值原理, $u(x)$ 不能在 $|x| \leq R$ 上面消失, 这样, (3.19) 得出了 $u(x) \equiv 0$.

为了描述孤立奇点的“阶”, 我们需要以下的可去奇点的必要条件.

定理 3.2. 设 $u(x)$ 是方程 (1.9) 在 $0 < |x| \leq R$ 的正 C^2 解, 其中 $1 < (n+\sigma)/(n-2) < \alpha < (n+2)/(n-2)$. 假设 $h(x)$ 和 $b_j(x)$ 满足定理 3.1 当中的条件, 并且

$$b_j \in L_{n/(1-\delta)}(|x| \leq R) \quad \text{对某些 } 0 < \delta < 1. \quad (3.20)$$

那么, 如果

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} u^{(\alpha-1)n/(2+\sigma)} \leq c < +\infty, \quad (3.21)$$

其中 c 和 ε 无关, 那么 $x = 0$ 处的奇点是可取的, 也就是说, $u(x)$ 可以被扩展成球 $|x| \leq R$ 上的连续 H^1 弱解.

证明 证明利用了定理 3.1, 两次利用 De Giorgi-Nash-Moser 迭代论证. 我们首先指出

$$\int_{\varepsilon < |x| < R} (hu^{\alpha-1})^{n/2} = \int_{\varepsilon < |x| < R} u^{(\alpha-1)n/(2+\sigma)} h^{n/2} u^{(n\sigma(\alpha-1)/2)/(2+\sigma)}$$

以及, 利用 (3.1a) 和 (3.4), 我们有

$$\int_{\varepsilon \leq |x| < R} (hu^{\alpha-1})^{n/2} dx \leq C < +\infty \quad (3.22)$$

其中 C 不依赖 ε . 设 $p_0 = ((n-2)/(2+\sigma))(\alpha - (n+\sigma)/(n-2))$ 和 $q_0 = \frac{1}{2}(p_0 + 1) = \frac{1}{2}((n-2)/(2+\sigma))(\alpha - 1)$. 根据 Serrin[12], 我们定义, 对于 $q \geq q_0, l > 0$,

$$F(u) = \begin{cases} u^q, & 0 < u \leq l; \\ \frac{1}{q_0}[ql^{q-q_0}u^{q_0} + (q_0 - q)l^q], & l \leq u. \end{cases}$$

以及

$$G(u) = F(u)F'(u) - q.$$

显然 F 是 u 的一个 C^1 函数而 G 是 u 的分段光滑函数, 在 $u = l$ 有一个角. 更进一步, 因为 $p_0 > 0$ (由 $(n+\sigma)/(b-2) < \alpha$ 得到), F, G 满足

$$F \leq \frac{q}{q_0} l^{q-q_0} u^{q_0}, \quad uF' \leq qF, \quad (3.23a)$$

$$|G| \leq FF', \quad (3.23b)$$

$$G' \geq \begin{cases} \frac{1}{q} p F'^2, & u < l; \\ \frac{1}{q_0} p_0 F'^2, & u > l. \end{cases} \quad (3.23c)$$

现在令 $\eta(x), \bar{\eta}(x)$ 是肺腑的 C^∞ 函数, η 在 $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$ 上有紧支集, 而 $\bar{\eta}$ 在远点的某个邻域上面消失. 把 $(\eta\bar{\eta})^2 G(u)$ 作为测试函数代入 (2.1) 我们得到

$$\int_{|x| \leq R} \left\{ (\eta\bar{\eta})^2 G'(u) |\nabla u|^2 + 2\eta\bar{\eta} G(u) \nabla(\eta\bar{\eta}) \cdot \nabla u - (\eta\bar{\eta})^2 G(u) [b_j u_i + h u^\alpha] \right\} dx = 0. \quad (3.24)$$

利用 (3.23) 并简化我们从 (3.14) 得到

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} (\eta\bar{\eta})^2 |\nabla(F(u))|^2 &\leq c(q) \left\{ \int_{|x| \leq R} |\nabla(\eta\bar{\eta})|^2 F^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x| \leq R} (\eta\bar{\eta})^2 |b|^2 F^2 + \int_{|x| \leq R} (\eta\bar{\eta})^2 h u^{\alpha-1} F^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

接下来, 我们利用赫尔德和索伯列夫不等式计算边界:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} (\eta\bar{\eta})^2 h u^{\alpha-1} F^2 &\leq \left(\int_{|x| \leq R} h u^{\alpha-1} \right)^{2/n} \|\eta\bar{\eta} F\|_{L_{2n/(n-2)}(B_R)}^2 \\ &\leq C_n^2 \|h u^{\alpha-1}\|_{L_{n/2}(B_R)} \left\{ \int_{|x| \leq R} \eta\bar{\eta} |\nabla F|^2 + \int_{|x| \leq R} |\nabla(\eta\bar{\eta})|^2 F^2 \right\}, \end{aligned}$$

其中 C_n 是索伯列夫常数. 因此如果我们选择足够小的 R (依赖 q) 满足

$$\|h u^{\alpha-1}\|_{L_{n/2}(B_R)} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{C(q) C_n^2}, \quad (3.26)$$

其中 $C(q)$ 是 (3.25) 当中的常数. 从 (3.25) 当中得到, 对于一个新的常数 $C(q)$,

$$\int_{|x| \leq R} (\eta\bar{\eta})^2 |\nabla F|^2 \leq C(q) \left\{ \int_{|x| \leq R} |\nabla(\eta\bar{\eta})|^2 F^2 + \int_{|x| \leq R} (\eta\bar{\eta})^2 |b|^2 F^2 \right\}. \quad (3.27)$$

类似地,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} (\eta\bar{\eta})^2 |b|^2 F^2 &\leq \|b\|_{L_n(B_R)}^2 \|\eta\bar{\eta} F\|_{L_{2n/(n-2)}(B_R)}^2 \\ &\leq C_n^2 \|b\|_{L_n(B_R)}^2 \left\{ \int_{|x| \leq R} (\eta\bar{\eta})^2 |\nabla F|^2 + \int_{|x| \leq R} |\nabla(\eta\bar{\eta})|^2 F^2 \right\}. \end{aligned}$$

然后再次取足够小的 R 使得

$$\|b\|_{L_n(B_R)} \leq R^\delta \|b\|_{L_{n/(1-\delta)}(B_R)} < (2C_n^2 c(q))^{-1/2}. \quad (3.28)$$

可以从 (3.27) 得到

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} (\eta \bar{\eta})^2 |\nabla F|^2 &\leq C(q) \int_{|x| \leq R} |\nabla(\eta \bar{\eta})|^2 F^2 \\ &\leq C(q) \left\{ \int_{|x| \leq R} |\nabla \eta|^2 F^2 + |\nabla \bar{\eta}|^2 F^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

以及

$$\left(\int_{|x| \leq R} (\eta \bar{\eta} F)^{2n/(n-2)} \right)^{(n-2)/n} \leq C(q) \left\{ \int_{|x| \leq R} |\nabla \eta|^2 F^2 + |\nabla \bar{\eta}|^2 F^2 \right\}. \quad (3.30)$$

根据 [12] 中的引理 8, 存在一个序列 $\bar{\eta}^k$ 几乎处处趋于 1, 而 $\|\nabla \bar{\eta}^k\|_{L_n(B_R)} \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)^1$. 因此

$$\int_{|x| \leq R} |\nabla \bar{\eta}^k|^2 F^2 \leq \|\nabla \bar{\eta}^k\|_{L_n(B_R)}^2 \|F\|_{L_{2n/(n-2)}(B_R)}^2. \quad (3.31)$$

因此, 利用 (3.21),

$$\int_{|x| \leq R} F^{2n/(n-2)} \leq c(l, q) \int_{|x| \leq R} u^{2n/(n-2)q_0} = C(l, q) \int_{|x| \leq R} u^{(\alpha-1)n/(2+\sigma)} < +\infty,$$

通过 (3.21) 可以得到

$$\int_{|x| \leq R} |\nabla \bar{\eta}^k|^2 F^2 \rightarrow 0, \quad \text{其中 } k \rightarrow +\infty.$$

结合 (3.29), (3.30) 得到

$$\begin{aligned} \|\eta F\|_{L_{2n/(n-2)}(B_R)}^2 &\leq C(q) \int_{|x| \leq R} |\nabla \eta|^2 F^2, \\ \int_{|x| \leq R} \eta^2 |\nabla F|^2 &\leq C(q) \int_{|x| \leq R} |\nabla \eta|^2 F^2. \end{aligned}$$

¹ 现在给出一个满足李普希兹条件并且符合上述要求的序列: 设 $\varepsilon > 0$, 并定义

$$\bar{\eta}^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \varepsilon; \\ 1, & |x| \geq R; \\ \frac{1}{\log(R/\varepsilon)} \log \frac{|x|}{\varepsilon}, & \varepsilon < |x| < R. \end{cases}$$

然后 $\bar{\eta}^\varepsilon \rightarrow 1$ 在 $\varepsilon > 0$ 时几乎处处成立, 并且

$$\|\nabla \bar{\eta}^\varepsilon(x)\|_n \leq \frac{c}{(\log(R/\varepsilon))^{n-1}} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

然后我们令 $l \rightarrow +\infty$, 因为 $F(u) \rightarrow u^q = u^{(p+1)/2}$,

$$\|\eta u^q\|_{L_{2n/(n-2)}(B_R)} \leq C(q) \int_{|x| \leq R} |\nabla \eta|^2 u^{2q}, \quad (3.32a)$$

$$\int \eta^2 |\nabla u^q|^2 \leq C(q) \int_{|x| \leq R} |\nabla \eta|^2 u^{2q}. \quad (3.32b)$$

不等式 (3.32) 可以在使用有限步之后得到 $u \in H_1(B_R) \cap L_q(B_R)$ 对于任意 $q > 0$ 成立, 从而得到 u 可以被延拓成一个 B_R 上的 H_1 的弱解, 并且

$$d(x) = hu^{\alpha-1} \in L_{n/2+\delta_1}(B_R) \quad (3.33)$$

对于以下依赖 σ 的 $\delta_1 > 0$ 成立. 这足够再次进行迭代论证 (参见 [12]). 通过一个标准的结果 (参见 [15]), 如果 $u(x)$ 是 (1.9) 在 $0 < |x| \leq R$ 上的一个 H_1 弱解并且满足 (3.33), 那么 $u(x)$ 等价于一个 $|x| \leq R$ 上面的连续函数. 至此, 证明结束.

注记. 1. 附录 A 的例 1 真是了定理 3.2 在 $1 < \alpha < (n + \sigma)/(n - 2)$ 的时候不一定是对的;

2. 我们不知道在 $b_j \in L_n(|x| \leq R)$ 的情况下不使用条件 (3.20) 是否是可能的, 附录 A 的例 2 表明如果 $b_j(x) = O(1/|x|)$, 那么定理 3.2 不一定是对的.

3. 如果 $\sigma = -2$ 并且 $1 < \alpha < (n + 2)/(n - 2)$, 那么通过定理 3.1, $u(x)$ 在可能的奇点 $x = 0$ 处有界. 根据 Serrin 的结果 [12], 奇点是可去的.

推论 3.3. 假设定理 3.1 当中的条件成立, (3.20) 满足而 $1 < (n + \sigma)/(n - 2) < \alpha < (n + 2)/(n - 2)$. 那么要不原点是可去奇点, 要么 $x \rightarrow 0$ 的时候, $u(x) \rightarrow +\infty$.

证明 通过定理 3.2, 如果远点处的奇点不可取, 那么存在一个点列 $\{x_i\}$, $x_j \rightarrow 0$, 满足 $u(x_j) \rightarrow +\infty$. 令

$$\mu_j = \inf_{|x|=|x_j|} u(x).$$

通过定理 3.1 的第 (ii) 部分哈纳克不等式, $\mu_j \rightarrow +\infty$. 因为 $\Delta u + b_j u_j = -hu^\alpha \leq 0$, 最大值原理指出

$$u(x) \geq \min(\mu_j, \mu_{j+1}) \quad \text{其中 } |x_{j+1}| < |x| < |x_j|.$$

因此 $u(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow 0)$.

定理 3.3. 设 $u(x)$ 是方程 (1.9) 在 $0 < |x| \leq R$ 上的正 C^2 解, 其中 $(n+\sigma)/(n-2) < \alpha < (n+2)/(n-2)$, $-2 < \sigma < 2$. 假设 $h(x), b_j(x)$ 满足 (3.1) - (3.3), 进一步 b_j 满足 (3.20). 那么要么原点处的奇点可去, 要么存在正常数 c_1, c_2 满足

$$\frac{c_1}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \leq u(x) \leq \frac{c_2}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \quad \text{在 } x=0 \text{ 附近.} \quad (3.34)$$

进一步, 如果

$$|D^\tau b_j(x)| \leq c|x|^{-1-|\tau|}, \quad |D^\tau h(x)| \leq c|x|^{\sigma-|\tau|} \quad \text{在 } x=0 \text{ 附近} \quad (3.35)$$

对于一切 $|\tau| \leq k-1$ 成立, 这样

$$|D^\tau u(x)| \leq \frac{c}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)+|\tau|}}, \quad |\tau| \leq k. \quad (3.36)$$

证明 通过定理 3.1,

$$u(x) \leq \frac{c}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}.$$

如果 (3.34) 不成立, 那么

$$\liminf_{x \rightarrow 0} |x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} u(x) = 0.$$

根据定理 3.1 的第 (ii) 部分推导出

$$|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} u(x) \rightarrow 0, \quad \text{其中 } x \rightarrow 0.$$

我们将要证明零点处的奇点是可去的. 通过定理 2.2, 只需要得到 (3.21). 为此, 我们用 (3.4) 来约束,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x| < R} u^{(\alpha-1)n/(2+\sigma)} &= \int_{\varepsilon < |x| < R} u u^{(\alpha n - (n+2+\sigma))/(2+\sigma)} \\ &\leq c \int_{\varepsilon < |x| < R} u r^{-(\alpha n - (n+2+\sigma))/(\alpha-1)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

令

$$\varphi(r) = r^{-((n-2)/(\alpha-1))(\alpha - (n+\sigma)/(n-2))}.$$

那么

$$\Delta\varphi = -\frac{n-2}{\alpha-1} \left(\alpha - \frac{n+\sigma}{n-2} \right) \frac{2+\sigma}{\alpha-1} r^{-(\alpha n - (n+2+\sigma))/(\alpha-1)}.$$

设 $\zeta(x) \in C_0^\infty(\varepsilon \leq |x| \leq R)$ 满足 (3.7). 利用 $\eta = \zeta\varphi(r)$ 作为 (2.1) 的测试函数, 并且利用散度定理,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x| < R} \zeta u \varphi \left\{ -\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - hu^{\alpha-1} \right\} &= \int_{\varepsilon < |x| < R} (\varphi \Delta\zeta + 2\nabla\zeta \cdot \nabla\varphi) u \\ &\quad + \int_{\varepsilon < |x| < R} \zeta \varphi b_j u_j. \end{aligned} \quad (3.38)$$

利用 (3.4) 和 (3.7), 我们做出估计:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x| < R} (\varphi \nabla\zeta + 2\nabla\zeta \cdot \nabla\varphi) &\leq c_1(R) + \int_{\varepsilon < |x| < 2\varepsilon} (|\Delta\zeta|\varphi + 2|\nabla\zeta||\nabla\varphi|) u \\ &\leq c_1(R) + c\varepsilon^n \varepsilon^{-2} \\ &\quad \times \varepsilon^{((n-2)/(\alpha-1))(\alpha-(n+\sigma)/(n-2))} \varepsilon^{-(2+\sigma)/(\alpha-1)} \\ &\leq c < +\infty. \end{aligned} \quad (3.39)$$

接下来我们估计 (3.38) 右端第二项. 考虑 (其中 ρ 足够小)

$$\begin{aligned} \int_{\rho < |x| < 2\rho} \zeta \varphi b_j u_j &\leq \int_{\rho < |x| < 2\rho} \zeta \varphi |b| |\nabla u| \\ &\leq \|b\|_{n/(1-\delta)} \|\varphi\|_{2n/(n-2+2\delta)} \|\nabla u\|_2, \end{aligned} \quad (3.40)$$

其中 δ 和 (3.20) 当中一样 (范数分布在区间 $\rho < |x| < 2\rho$ 内). 因此 $\|b\|_{n/(1-\delta)}$ 是一致有界的. 通过简单的计算, 我们可以发现

$$\|\varphi\|_{2n/(n-2+2\delta)} \leq c\rho^{-((n-2)/(\alpha-1))(\alpha-(n+\sigma)/(n-2))+(n-2)/2+\delta}. \quad (3.41)$$

现在我们通过如下方法估计 $\|\nabla u\|^2$: 设 $\zeta(x) \in C_0^\infty(\rho < |x| < 4\rho)$. 在方程 (2.1) 当中取测试函数 $\eta = \zeta^2 u$, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta^2 |\nabla u|^2 &= -2 \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta u \nabla\zeta \cdot \nabla u + \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta^2 b_j u u_j \\ &\quad + \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta^2 h u^{\alpha+1}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

通过 (2.27),

$$\begin{aligned} -2 \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta u \nabla \zeta \nabla u &\leq c\theta^2 \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta^2 |\nabla u|^2 + \frac{c}{\theta^2} \int_{\rho < |x| < 4\rho} |\nabla \zeta|^2 u^2, \\ \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta^2 b_j u u_j &\leq c\theta^2 \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta^2 |\nabla u|^2 + \frac{c}{\theta^2} \int_{\rho < |x| < 4\rho} \zeta^2 |b|^2 u^2. \end{aligned}$$

代入这两个界到 (3.42) 当中, 我们发现, 对于一些小的 θ ,

$$\int_{\rho < |x| < 2\rho} \zeta^2 |\nabla u|^2 \leq c \int_{\rho < |x| < 4\rho} \{|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2 |b|^2 + \zeta^2 h u^{\alpha-1}\} u^2.$$

选取合适的 $\zeta(x)$, 并利用 (3.2) 和 (3.4) 可以得到的 $h u^{\alpha-1} \leq c/|x|^2$, 我们得到 (足够小的 ρ)

$$\int_{\rho < |x| < 2\rho} \zeta^2 |\nabla u|^2 \leq \frac{c}{\rho^2} \int_{\rho < |x| < 4\rho} u^2.$$

这和 (3.4) 一起得到

$$\int_{\rho < |x| < 2\rho} \zeta \varphi |b| |\nabla u| \leq c\rho^\delta, \quad \delta > 0. \quad (3.43)$$

令

$$F(\varepsilon) = \int_{\varepsilon < |x| < R} \zeta \varphi |b| |\nabla u|$$

通过 (3.43),

$$F(\varepsilon) \leq c\varepsilon^\delta + F(2\varepsilon).$$

通过连续迭代 (ε 固定很小),

$$\begin{aligned} F(2^{-k}\varepsilon) &\leq c\varepsilon^\delta 2^{-k\delta} + F(2^{-k+1}\varepsilon) \\ &\leq c\varepsilon^\delta \sum_{j=1}^k 2^{-ja} + F(\varepsilon) \\ &\leq c\varepsilon^\delta + F(\varepsilon), \end{aligned}$$

这是由于 $\sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-ja} < +\infty$. 设 $k \rightarrow +\infty$, 我们发现 $F(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的时候是一致有界的, 也就是

$$F(\varepsilon) = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \zeta \varphi |b| |\nabla u| \leq c < +\infty$$

其中 c 依赖 ε . 和 (3.39) 和 (3.38) 表明

$$\int_{\varepsilon < |x| < R} \zeta u \varphi \left\{ -\frac{\Delta \varphi}{\varphi} - h u^{\alpha-1} \right\} dx \leq c < +\infty.$$

根据假设 $h u^{\alpha-1} = o(1/|x|^2)$, 而

$$-\frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \frac{A}{|x|^2}, \quad A = \frac{n-2}{\alpha-1} \left(\alpha - \frac{n+\sigma}{n-2} \right) \frac{2+\sigma}{\alpha-1} > 0.$$

因此

$$\int_{\varepsilon < |x| < R} \zeta u r^{-(\alpha n - (n+2+\sigma))/(\alpha-1)} \leq c < +\infty$$

关于 ε 一致. 这与 (3.21) 导出的 (3.37) 一起, 完成了 (3.34) 的证明. 为了得到 (3.36), 我们如下进行. 对于一个 $0 < |x| < R$ 上面的解 $u(x)$, 我们定义尺度函数

$$v^\varepsilon(x) = \varepsilon^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} u(\varepsilon x)$$

满足

$$\Delta v^\varepsilon(x) + \varepsilon b_j(\varepsilon x) v_j^\varepsilon(x) + \varepsilon^{-\sigma} h(\varepsilon x) (v^\varepsilon(x))^\alpha = 0, \quad \text{其中 } 0 < |x| < R/\varepsilon.$$

因此 $v^\varepsilon(x)$ 在 $\frac{1}{4} < |x| < 2$ 是一致有界的. 同样, 通过 (3.1a) 和 (3.2), 系数 $\varepsilon^{-\sigma} h(\varepsilon x)$ 和 $\varepsilon b_j(\varepsilon x)$ 在 $\frac{1}{4} < |x| < 2$ 上面也是一致有界的. 类似地, 通过 (3.35) 他们的导数在 $\frac{1}{4} < |x| < \frac{1}{2}$ 上也是一致有界的. 因此, 通过椭圆理论我们得到导数 $D^\tau v^\varepsilon(x)$ 在 $\frac{1}{2} < |x| < \frac{3}{2}$ 上对于 ε 一致有界. 从而

$$|\varepsilon x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} (D^\tau u)(\varepsilon x) = |x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)+|\tau|} D^\tau v^\varepsilon |x| \leq c$$

对于 $\frac{1}{2} < |x| < \frac{3}{2}$ 成立. 令 $\varepsilon x = y$, 我们有

$$|y|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)+|\tau|} |D^\tau u)(y)| \leq c, \quad \text{在 } y = 0 \text{ 附近,}$$

这个 (3.36) 一样.

定理 3.4. 假设 $u(x)$ 是 (1.9) 在 $0 < |x| \leq R$ 的一个正 C^2 解, 在 $x = 0$ 处有一个不可去奇点. 假设 $b_j(x)$ 满足 (3.20) 并且

$$|b_j(x)| = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}$$

对于 $n \geq 3$ 成立；而对于 $n = 3$, $|Db_j(x)| \leq c/|x|^2$. 假设 $h(x)$ 满足 (3.1b) 且

$$h(x) \rightarrow h(0)|x|^\sigma \quad \text{其中 } x \rightarrow 0 \quad (3.44)$$

而

$$1 < \frac{n+\sigma}{n-2} < \alpha < \frac{n+2}{n-2}, \quad (3.45a)$$

$$\alpha \neq \frac{n+2+2\sigma}{n-2}. \quad (3.45b)$$

那么

$$|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}u(x) \rightarrow C_0 \quad \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时}, \quad (3.46a)$$

其中

$$C_0 = \left\{ \frac{1}{h(0)} \frac{(2+\sigma)(n-2)}{(\alpha-1)^2} \left(\alpha - \frac{n+\sigma}{n-2} \right) \right\}^{1/(\alpha-1)}. \quad (3.46b)$$

更进一步, 对于 $u(x)$ 的导数, 我们有

$$|x|^{(\alpha+1+\sigma)/(\alpha-1)}u_{x_i} \rightarrow -C_0 \frac{2+\sigma}{\alpha-1} \zeta_i, \quad \text{其中 } x \rightarrow 0, \frac{x_i}{|x|} \rightarrow \zeta_i.$$

证明 考虑尺度变换

$$v^\lambda(x) = \lambda^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}u(\lambda x);$$

$v^\lambda(x)$ 满足

$$\Delta v^\lambda(x) + \lambda b_j(\lambda x)v^\lambda + \lambda^{-\sigma}h(\lambda x)(v^\lambda(x))^\alpha = 0, \quad \text{其中 } 0 < |x| < R/\lambda. \quad (3.48a)$$

注意到 $\lambda \rightarrow 0$ 时 $|\lambda b_j(\lambda x)| = \lambda o(1/\lambda|x|) = (1/|x|)o(1)$, 而 $\lambda^{-\sigma}h(\lambda x) = |x|^\sigma O(1)$, 而且通过 (3.34)

$$\frac{c_1}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \leq v^\lambda|x| \leq \frac{c_2}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}. \quad (3.48b)$$

因此 $v^\lambda(x)$ 在 $0 < |x| < R/\lambda$ 的紧子集上一致有界/利用椭圆周期理论, v^λ 和 Dv^λ 在任何这样的紧集上面都构成等度连续类, 例如 K . 因此给出任何序列 $\lambda_k \rightarrow 0$, 都存在一个子列 λ_{k_j} 使得 $v^{\lambda_{k_j}} \rightarrow v$ 在 K 上成立 (在 C^1 拓扑上面). 更进一步, v 是

$$\Delta v + h(0)|x|^\sigma v^\alpha \quad (3.49)$$

的一个解. 我们声明一个事实, 即在紧子集的 C^1 拓扑当中, v 是 (3.49) 的良定义解析解, 对于 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 而 $v^{\lambda_{k_j}} \rightarrow v$. 为了理解这一点, 考虑任何紧集 $K' \subseteq K$. 用 K' 重复上述论证, 子序列 $v^{\lambda_{k_j}}$ 在 K' 上有一个收敛子序列 $v^{\lambda_{k'_j}} \rightarrow v'$. 再次地, v' 满足 (3.49). 但是, 值得注意, $v'|_K = v$. 通过**唯一延拓**, 整个原始子序列 $v^{\lambda_{k_j}}$ 收敛, 使得 u 是良定义的. 通过 (3.48b) 我们得到

$$\frac{c_1}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \leq v(x) \leq \frac{c_2}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}. \quad (3.50)$$

因此 $v(x)$ 满足 (3.49) 并且有两个孤立奇点, 一个在 $x = 0$, 而另一个在 $x = \infty$. 这两个奇点满足 (3.50). 根据定理 1.4 (在这一节最后证明), 我们有

$$v(x) = \frac{C_0}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}, \quad (3.51)$$

其中 C_0 由 (3.46b) 给出. 因为函数 $v(x)$ 是唯一的, 我们指出在 C^1 拓扑下, $v^\lambda(x) \rightarrow v(x)$ 对于一切序列 $\lambda \rightarrow 0$ 成立. 因为

$$|\lambda x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} u(\lambda x) = |x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} v^\lambda(x) \rightarrow C_0, \quad \text{其中 } \lambda \rightarrow 0.$$

在 $\frac{1}{2} < |x| < 1$ 的时候成立, 我们很快就能得到 (3.46). 同理, 利用

$$|\lambda x|^{(\alpha+1+\sigma)/(\alpha-1)} u_{x_i}(\lambda x) = |x|^{(\alpha+1+\sigma)/(\alpha-1)} v_{x_i}^\lambda(x)$$

以及对于 x 作为 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 的紧子集当中元素, 有

$$|x|^{(\alpha+1+\sigma)/(\alpha-1)} v_{x_i}^\lambda(x) \rightarrow -C_0 \frac{2+\sigma}{\alpha-1} \frac{x_i}{|x|}, \quad \text{其中 } \lambda \rightarrow 0.$$

我们可以很容易从中得到 $u(x)$ 导数的估计 (3.47).

注记. 1. 对于高阶导数, 可以推导出类似 (3.47) 的渐近函数。

2. 如果 $1 < \alpha < (n + \sigma)/(n - 2)$, 那么奇点的阶和 (3.34) 当中不一样. 在附录 A 当中, 我们会展示如果方程 (1.6) 当中 $1 < \alpha < (n + \sigma)/(n - 2)$, 那么

$$\frac{c_1}{|x|^{n-2}} \leq u(x) \leq \frac{c_2}{|x|^{n-2}}, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近.}$$

3. 我们怀疑在 (3.20) 被 $|b_j(x)| \in L_n$ 取代之后仍然有 (3.34)。如果 $|b_j(x)| = O(1/|x|)$, 那么 (3.34) 不一定成立. 这在附录 A 的例 2 党政工有体现.

着用这一节的方法, 我们可以证明下面结果.

定理 3.5. 设 $u(x)$ 是方程 (1.9) 在 $0 < |x| \leq R$ 上的解, 假设 h, b_j 满足定理 3.1 的条件. 如果 $(n + \sigma)/(n - 2) < \alpha < (n + 2)/(n - 2)$, $\sigma > -2$, 那么 $u(x)$ 是 (1.9) 的一个分布解, 换言之, 对于一切 $\zeta \in C_0^\infty(|x| \leq R)$,

$$\int_{|x| \leq R} \{\nabla u \cdot \nabla \zeta - \zeta(b_j u_j + h u^\alpha)\} dx = 0. \quad (3.52)$$

注记. 1. 附录 A 的例 2 辨明当 $1 < \alpha \leq (n + \sigma)/(n - 2)$ 的时候, 定理 3.5 不成立。

2. 定理 1.3 是定理 3.3, 4, 5 的推论。

以下定理处理位于无穷远处的孤立奇点。

定理 3.6. 设 $u(x)$ 是方程 (1.9) 在 $|x| \geq R (R > 0)$ 的解, 其中 $1 < \alpha < (n + 2)/(n - 2)$. 假设 $h(x)$ 是 $|x| \geq R$ 上非负的 C^1 函数且在 $x = \infty$ 附近满足 (3.1), 其中 $\sigma > -2$. 假设 b_j 在 $x = \infty$ 附近满足 (3.2), (3.3). 那么

$$(i) \quad u(x) \leq \frac{c}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \quad \text{在 } x = \infty \text{ 附近.} \quad (3.53)$$

(ii) 如果 $1 < \alpha < (n + \sigma)/(n - 2)$, 那么在整个 $|x| \geq R$ 上面, $u(x) \equiv 0$.
(iii) 更进一步如果我们假设

$$|b_j(x)| \in L_{n/(1-\delta)}(|x| \geq R) \quad \text{对一切 } 0 < \delta < 1, \quad (3.54)$$

以及 $(n + \sigma)/(n - 2) < \alpha < (n + 2)/(n - 2)$, 那么要么 ∞ 处的奇点是可去的, 要么存在正的常数 c_1, c_2 使得

$$\frac{c_1}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \leq u(x) \leq \frac{c_2}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \quad \text{在 } x = \infty \text{ 附近.} \quad (3.55a)$$

更进一步, 如果 (3.35) 在 $x = \infty$ 附近成立, 那么

$$|D^\tau u(x)| \leq \frac{c}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)+|\tau|}}, \quad |\tau| \leq k. \quad (3.55b)$$

这些奇性解, 如果存在, 是分布解.

证明 我们采用一个反演

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{|x|^2}, \\ v(y) &= |x|^{n-2} u(x). \end{aligned} \quad (3.56)$$

那么 $v(y)$ 满足

$$\Delta v + \tilde{b}_j(y) v_j(y) + \tilde{h}(y) v^\alpha = 0, \quad |y| < \frac{1}{R}, \quad (3.57)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{b}_j(y) &= \frac{1}{|y|^2} b_k \left(\frac{y}{|y|^2} \right) \left(\delta_{kj} - \frac{2y_k y_j}{|y|^2} \right), \\ \tilde{h}(y) &= |y|^{\alpha(n-2)-(n+2+\sigma)} h \left(\frac{y}{|y|^2} \right). \end{aligned}$$

很容易看出 $\tilde{b}_j(y)$ 在 $y = 0$ 附近与 $b_j(x)$ 在 $x = \infty$ 附近的性质是一样的. 同理, 在 $y = 0$ 附近, $\tilde{h}(y)$ 满足

$$\begin{aligned} c_1 |y|^{\tilde{\sigma}} &\leq \tilde{h}(y) \leq c_2 |y|^{\tilde{\sigma}}, \\ |\nabla \log \tilde{h}| &\leq \frac{c}{|y|}, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\sigma} = \alpha(n-2) - (n+2+\sigma)$. 利用定理 3.1, 我们知道

$$v(y) \leq \frac{c}{|y|^{(2+\tilde{\sigma})/(\alpha-1)}}, \quad \text{在 } y = 0 \text{ 附近.}$$

这就得到了 (3.53) .

如果 $1 < \alpha < (n+\sigma)/(n-2)$, 那么 $\sigma+2 < 0$. 因此根据推论 3.2, $v(y) \equiv 0$, 也就证明了定理的第 (iii) 部分.

接下来我们考虑第 (ii) 部分. 如果 $\alpha > (n+\sigma)/(n-2)$, 那么 $\tilde{\sigma}+2 > 0$. 仍然有 $(n+\tilde{\sigma})/(n-2) = \alpha - (2+\sigma)/(n-2) < \alpha$. 因此定理 3.3 就得到了方程 (3.56) . 这就得到了要么 $y = 0$ 附近的奇点是可取的, 要么对于任何 $c_1, c_2 > 0$,

$$\frac{c_1}{|y|^{(2+\tilde{\sigma})/(\alpha-1)}} \leq v(y) \leq \frac{c_2}{|y|^{(2+\tilde{\sigma})/(\alpha-1)}}, \quad \text{在 } y = 0 \text{ 附近.} \quad (3.58)$$

如果 $y = 0$ 处的奇点是可去的, 那么

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right), \quad \text{在无穷远处.}$$

如果 (3.58) 成立, 那么

$$\frac{c_1}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \leq u(x) \leq \frac{c_2}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}.$$

解的分布性质是定理 3.5 的推论. 这就完成了定理的证明.

注记. 定理 3.6 的 (i) (iii) 部分可以直接通过方程 (1.9) 证明, 就像定理 3.1-3.5 一样.

定理 1.4 的证明 利用定理 3.3 和 3.6, $u(x)$ 满足

$$\frac{c_1}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \leq u(x) \leq \frac{c_2}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \quad (3.59)$$

在奇点 $x = 0$ 和 $x = \infty$ 附近, 由 $1 < (n + \sigma)/(n - 2) < \alpha < (n + 2)/(n - 2)$ 给出. 为了得到 (1.8), 我们用附录 A 当中的变换 (A.4), 也就是

$$t = -\log |x|, \\ \psi(t, \theta) = |x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} u(|x|, \theta), \quad \theta \in S^{n-1}, t \in \mathbb{R}.$$

利用 (3.58), $\psi(t, \theta)$ 是有界的,

$$c_1 \leq \psi(t, \theta) \leq c_2, \quad (3.60)$$

并且满足 (参见 (A.5))

$$\psi_{tt} + \Delta_\theta \psi + a\psi_t - C_0^{\alpha-1} \psi + \psi^\alpha = 0, \quad (3.61a)$$

其中

$$a = \frac{n-2}{\alpha-1} \left(\frac{n+2+\sigma}{n-2} - \alpha \right). \quad (3.61b)$$

因为, 根据假设 (1.7), $\alpha \neq (n+2+2\sigma)/(n-2)$, 因此 $a \neq 0$. 利用 (3.34), (3.36), (3.55) 以及 $\psi(t, \theta)$ 的定义, 我们可以看到 ψ 对 t 和/或 θ 的任意阶导数都是一致有界的. 通

过把 (3.61a) 乘上 ψ_t 并对于一些 t_0 和 $T > t_0$ 积分, 在 S^{n-1} 上面, 我们得到

$$\begin{aligned} & a \int_{t_0}^T dt \int_{S^{n-1}} d\omega \psi_t^2(t, \theta) + \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} d\omega \psi_t^2(t, \theta) \Big|_{t_0}^T \\ & - \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} d\omega \psi_\theta^2(t, \theta) \Big|_{t_0}^T - \frac{1}{2} C_0^{\alpha-1} \int_{S^{n-1}} d\omega \psi^2(t, \theta) \Big|_{t_0}^T \\ & + \frac{1}{\alpha+1} \int_{S^{n-1}} d\omega \psi^{\alpha+1}(t, \theta) \Big|_{t_0}^T = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

因为 $\psi, \psi_t, \psi_\theta$ 都是一致有界的, 我们得到, 零 $T \rightarrow +\infty$,

$$\int_{t_0}^{\infty} dt \int_{S^{n-1}} d\omega \psi_t^2(t, \theta) \leq c < +\infty. \quad (3.63)$$

令

$$g(t) = \int_{S^{n-1}} d\omega \psi_t^2(t, \theta).$$

因为 ψ_t, ψ_{tt} 是一致有界的, 并且

$$g'(t) = 2 \int_{S^{n-1}} d\omega \psi_t(t, \theta) \psi_{tt}(t, \theta),$$

我们推出 $|g'(t)|$ 也是一致有界的. 我们结合

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t) dt \leq c < +\infty,$$

以及 $|g'(t)|$ 是有界的. 我们指出 $g(t) \rightarrow 0$, 其中 $t \rightarrow +\infty$. 假设不是如此, 那么可以找到一个 ε , 存在一个序列 $\{t_j\}$, 其中 $t_j \rightarrow +\infty$ 并且 $g(t_j) \geq 2\varepsilon$. 设 L 是 $|g'(t)|$ 的一个界. 那么对于 $|t - t_j| < \varepsilon/L$, 我们就有 $g(t) \geq \varepsilon$. 选取子列 t'_j 满足 $t'_j > t'_{j-1} + (2\varepsilon/L)t'_0 > t_0$, 因此

$$\sum_{j=1}^N \int_{t'_{j-1}}^{t'_j} g(t) dt > \frac{2\varepsilon}{L} N \rightarrow +\infty, \quad \text{其中 } N \rightarrow +\infty,$$

这是矛盾的. 因此

$$g(t) = \int_{S^{n-1}} d\omega \psi_t^2(t, \theta) \quad \text{其中 } t \rightarrow +\infty. \quad (3.64)$$

因为 $\psi_t(t, \theta)$ 是一致有界的, 因此所有序列 $\{t_k\}$, 其中 $t_k \rightarrow +\infty$, 有一个子列 $\{t_{k_j}\}$ 使得

$$\psi_t(t_{k_j}, \theta) \rightarrow \chi(\theta), \quad \text{其中 } t_{k_j} \rightarrow +\infty.$$

因此 $\chi(\theta) = 0$ 在 S^{n-1} 上面处处成立. 因此, $\psi_t(t_{k_j}, \theta) \rightarrow 0$. 所以 $\psi_t(t, \theta) \rightarrow 0$, 其中 $t \rightarrow +\infty$. 令 $\omega(t, \theta) = \psi_t(t, \theta)$. 通过对 (3.61) 求导, 我们有

$$\omega_{tt} + \Delta_\theta \omega + a\omega_t - C_0^{\alpha-1}\omega + \alpha\psi^{\alpha-1}\omega = 0. \quad (3.65)$$

我们把 (3.65) 乘上 ω_t , 并从 t_0 到 T 做积分. 然后利用 (3.63), $\psi_t(t, \theta) \rightarrow 0$, 其中 $t \rightarrow +\infty$, 然后利用 ψ, ψ_θ 和 ω 的有界性, 我们得到, 令 $T \rightarrow +\infty$, 那么

$$\int_{t_0}^{+\infty} dt \int_{S^{n-1}} d\theta \omega_t^2(t, \theta) \leq c < +\infty. \quad (3.66)$$

这和 $\int d\theta \omega_t^2(t, \theta)$ 的 t - 导数是有界的一起可以得到 $\omega_t(t, \theta) = \psi_{tt}(t, \theta) \rightarrow 0$, 其中 $t \rightarrow +\infty$. 继续这个过程, 我们得到 $\psi(t, \theta)$ 的一切 t - 导数在 $t \rightarrow +\infty$ 的时候都趋于零. 因为 $\psi_t(t, \theta)$ 是一致有界的, 并且 $\psi_t(t, \theta) \rightarrow 0$, 期中 $t \rightarrow +\infty$, 我们可以容易地得到

$$\psi(t, \theta) \rightarrow \varphi(\theta), \quad \text{其中 } t \rightarrow +\infty.$$

因为 $\psi_{tt}(t, \theta) \rightarrow 0$, 其中 $t \rightarrow +\infty$, 函数 $\varphi(\theta)$ 满足 (通过 (3.51))

$$\Delta_\theta \varphi(\theta) - C_0^{\alpha-1}\varphi + \varphi^\alpha = 0, \quad \text{在 } S^{n-1} \text{ 上}. \quad (3.67)$$

在附录 B 当中, 我们证明了 (3.67) 的唯一正解就是

$$\varphi(\theta) = C_0.$$

这表明,

$$\psi(t, \theta) \rightarrow C_0 \quad \text{其中 } t \rightarrow +\infty, \quad (3.68)$$

对于 $\theta \in S^{n-1}$ 是一致的. 对于任何序列 $t_k \rightarrow \infty$, 存在子列 t_{k_j} 满足

$$\nabla_\theta \psi(t_{k_j}, \theta) \rightarrow 0.$$

这就得到了

$$\nabla_{\theta}\psi(t, \theta) \rightarrow 0 \quad \text{其中 } t \rightarrow +\infty.$$

至此我们只考虑了 $t \rightarrow +\infty$ 的极限行为, 上述方法同样是和与极限 $t \rightarrow -\infty$, 并且得到了

$$\psi(t, \theta) \rightarrow C_0,$$

其中 $t \rightarrow -\infty$. 同样地, 我们发现 $\psi_t(t, \theta)$ 和 $\psi_{\theta}(t, \theta)$ 都在 $t \rightarrow -\infty$ 的时候收敛到零. 现在, 在恒等式 (3.62) 当中, 令 $t_0 = -T$ 并取极限 $T \rightarrow +\infty$. 阴雨 $\psi(t, \theta) \rightarrow C_0, \psi_t, \psi_{\theta} \rightarrow 0$, 其中 $t \rightarrow \pm\infty$, 我们得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S^{n-1}} d\omega \psi_t^2(t, \theta) = 0.$$

因为 $\phi_t(t, \theta) = 0$, 和 (3.68) 一起给出

$$\psi(t, \theta) = C_0.$$

这个 ψ 的定义一起得到了 (1.8). 定理 1.4 就证明了.

注记. 如果 (这会在 $-2 < \sigma < 0$ 时候发生) $1 < (n + \sigma)/(n - 2) < \alpha < (n + 2)/(n - 2)$, 并且 $\alpha = (n + 2 + 2\sigma)/(n - 2)$, 那么方程 (1.6) 的解, 在 $x = 0, \infty$ 存在两个奇点, 仍然满足 (3.59). 除了 (1.8a) 以外, 附录 A 的 (A.10) 还给了其他的球对称解. 我们并不知道 (1.6) 有 $x = 0, \infty$ 两个奇点的解是不是只有这些. 我们相信是的.

4 整体结果——一个特殊情形

本节中, 我们建立包含定理 1.1 的结果. 更一般的结果见第 6 节.

定理 4.1. 设 $u(x)$ 是方程

$$\Delta u + h(x)u^{\alpha} = 0 \tag{4.1}$$

在 $\mathbb{R}^n (n > 2)$ 上的非负 C^2 解, 其中 $1 \leq \alpha < (n + 2)/(n - 2)$. 假设 $h(x)$ 是非负的 C^2 函数满足

$$\Delta h \geq 0 \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 上}, \tag{4.2}$$

并且对于大的 $|x|$,

$$|\nabla \log h(x)| \leq \frac{c}{|x|}. \quad (4.3a)$$

对于 $n \geq 4$, 假设还有条件, 对于大的 $|x|$,

$$c_1 |x|^\sigma \leq h(x), \quad (4.3b)$$

其中

$$\sigma > -\frac{2}{n-3}. \quad (4.3c)$$

那么

$$u(x) \equiv 0.$$

注记. 1. 条件 (4.3b) 在三维的情况不必要. 我们猜测 $n \geq 4$ 的时候其实也不需要.

2. 定理 4.1 是定理 6.1 的特殊情况, 而定理 1.1 则是定理 4.1 的推论.

3. 附录 A 的例 1 和下面的例 1 表明定理 4.1 不总是成立如果没有类似 (3.2) 那样的条件. 同样地, 附录 A 的例 2 和下面的例 2 也说明了如果方程里有 $b_j(x)u_j(x)$ 项, 那么定理 4.1 也不一定成立.

4. 条件 (4.3a) 可以被一些积分条件替代.

定理 4.1 的证明 我们考虑 $b_j \equiv 0$ 情况的恒等式 (2.13), 并且做如下的改进: 首先, 通过散度定理

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta h_i u^{\alpha-2/(n-2)-\gamma} u_i &= -\frac{1}{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma} \int_{\Omega} \eta \Delta h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma} \int_{\Omega} \eta_i h_i u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

然后, 对 $\varphi = \eta h$ 使用引理 2.2,

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{2}{n-2} - \gamma \right) \int_{\Omega} \eta h u^{\alpha-n/(n-2)-\gamma} |\nabla u|^2 \\ = \int_{\Omega} \eta h^2 u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} + \frac{1}{\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma} \\ \times \int_{\Omega} (\eta \Delta h + 2\eta_j h_j + \Delta \eta h) u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

首先我们假设 $n \geq 4$, 并且 $\alpha > 1$. 那么通过选择足够小的 γ 我们得到 $\alpha - 2/(n - 2) - \gamma > 0$. 这样把 (4.4) 和 (4.5) 代入 (2.13), 我们得到

$$\begin{aligned}
& J + c \int_{\Omega} \eta h^2 u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} + \gamma(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |\nabla u|^4 \\
&= - \frac{3}{(\alpha + (n-4)/(n-2) - \gamma)(\alpha - 2/(n-2) - \gamma)} \\
&\quad \times \left[\frac{2(n-1)}{3(n-2)} - \gamma \right] \int_{\Omega} \eta \Delta h u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\
&\quad + \int_{\Omega} (c_1 \Delta \eta h + c_2 \eta_j h_j) u^{\alpha+(n-4)/(n-2)-\gamma} \\
&\quad - \frac{2(n-3)/(n-2) - 3\gamma}{\gamma + 2/(n-2)} \int_{\Omega} \Delta \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} |\nabla u|^2 \\
&\quad + \frac{4(1-\gamma)}{\gamma + 2/(n-2)} \int_{\Omega} \eta_{ij} u^{-\gamma-2/(n-2)} u_i u_j.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

对于 $n = 3$ 和 $\alpha > 2$, 我们利用 (2.13), (4.4) 和 (4.5) 得到

$$\begin{aligned}
& J + \frac{4}{3}(5-\alpha) \int_{\Omega} \eta h^2 u^{2\alpha-2} \\
&= - \frac{4}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \int_{\Omega} \eta \Delta h u^{\alpha-1} \\
&\quad + \frac{4}{3} \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \int_{\Omega} \Delta \eta h u^{\alpha-1} + \frac{2}{3} \frac{4\alpha-17}{\alpha-1} \int_{\Omega} \eta_i h_i u^{\alpha-1} + 2 \int_{\Omega} \eta_{ij} u^{-2} u_i u_j.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

定理的证明在 $n \geq 4, \alpha > 1$ 的时候基于 (4.6), 而在 $n = 3, \alpha > 2$ 的时候基于 (4.7). 剩余的情况 ($n \geq 4, \alpha = 1$ 和 $n = 3, 1 \leq \alpha \leq 2$) 是初等的, 并且会在最后考虑.

由于 $\Delta h \geq 0$, (4.6) 和 (4.7) 右边第一项 (体积项) 在 γ 足够小的时候是非负的. 零一箱在命题 2.3 当中被估计. 因此对于 $n \geq 4, \alpha > 1$, 和满足 (2.22) 的 ζ , 我们有

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2/(n-2)-\gamma} \\
& \leq c \int_{\Omega} (|D^2 \zeta| + |\nabla \zeta| |\nabla \log h|)^{\frac{2\alpha-2(n-2)-\gamma}{(\alpha-1)}} \\
& \quad \times h^{-(\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\alpha-1)},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

而对于 $n = 3, \alpha > 2$ (其中 $p > 2$)

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}(5-\alpha) \int_{\Omega} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2} \\ & \leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-1} (|\Delta \zeta| + |\nabla \zeta| |\nabla \log h|) h u^{\alpha-1} \\ & \quad + c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} |D^2 \zeta| u^{-2} |\nabla u|^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

为了完成证明, 我们选择 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$ 以及

$$\zeta(x) = 1, \quad \text{其中 } |x| \leq \frac{1}{2}R, \quad (4.10a)$$

$$|\nabla \zeta| \leq \frac{c}{R}, \quad |D^2 \zeta| \leq \frac{c}{R^2}, \quad \text{其中 } \frac{1}{2}R \leq |x| \leq R. \quad (4.10b)$$

这么 (4.3), (4.3) 一起得到

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \leq R} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2(n-2)-\gamma} \\ & \leq \frac{c}{R^{(2/(\alpha-1))(2\alpha-2/(n-2)-\gamma)+(5/(\alpha-1))(-\gamma+2(n-3)/(n-2))-n}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

对于 $\sigma > -2/(n-3)$, 它在 $R \rightarrow +\infty$ 的时候趋于 0.

接下来, 我们考虑 $n = 3(2 < \alpha < 5)$ 的情况. 利用 (2.22) 和 (4.10) 估计 (4.9), 我们得到

$$\int_{\Omega} \zeta^p h^2 u^{2\alpha-2} \leq \frac{c}{R^2} \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-1} h u^{\alpha-1} + \frac{c}{R^2} \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} u^{-2} |\nabla u|^2. \quad (4.12)$$

我们需要得到 (4.12) 的右边在 $R \rightarrow +\infty$ 的时候趋于零. 通过方程 (4.1), 我们得到

$$\int_{|x| \leq R} \zeta^{p-2} u^{-2} |\nabla u|^2 + \int_{|x| \leq R} \zeta^{p-2} h u^{\alpha-1} = (p-2) \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-3} \zeta_i u^{-1} u_i. \quad (4.13)$$

这说明, 对于 $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \leq R} \zeta^{p-2} |\nabla \log u|^2 \\ & \leq (p-2) \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-3} |\nabla \zeta| |\nabla \log u| \\ & \leq c\theta^2 \int_{|x| \leq R} \zeta^{p-2} |\nabla \log u|^2 + \frac{c}{\theta^2} \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-4} |\nabla \zeta|^2 \\ & \leq c\theta^2 \int_{|x| \leq R} \zeta^{p-2} |\nabla \log u|^2 + CR. \end{aligned} \quad (4.14)$$

对于足够小的 θ , 有

$$\int_{|x| \leq R} \zeta^{p-2} u^{-2} |\nabla u|^2 \leq CR. \quad (4.15)$$

这个 (4.13) 得到

$$\int_{|x| \leq R} \zeta^{p-1} h u^{\alpha-1} \leq CR. \quad (4.16)$$

将 (4.12) 和 (4.15), (4.16) 进行对比, 我们看到 (4.12) 的右边在 $R \rightarrow +\infty$ 的时候趋于零. 这就得到了 $u \equiv 0$. 接下俩我们考虑 $n = 3, 1 < \alpha \leq 2$ 的情况. 从方程 (4.1) 出发, 并利用 (2.27), 我们得到

$$\begin{aligned} & (2-\alpha) \int_{|x| \leq R} \zeta^p u^{\alpha-3} |\nabla u|^2 + \int_{|x| \leq R} \zeta^p h u^{2\alpha-2} \\ &= -\frac{1}{\alpha-1} \int_{|x| \leq R} \zeta^{p-2} \{p\zeta \Delta \zeta + p(p-1)|\nabla \zeta|^2\} u^{\alpha-1} \\ &\leq c\theta^2 \int_{|x| \leq R} \zeta^p h u^{2\alpha-2} + \frac{c}{\theta^2} \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} (|\Delta \zeta| + |\nabla \zeta|^2)^2 h^{-2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

选择足够小的 θ , 并且结合 (4.17) 和 (4.10) 我们得到 (4.17) 的右边以 $R^{-1-2\sigma}$ 趋于零, 再次得到 $u \equiv 0$. 最终我们考虑 $n \geq 3, \alpha = 1$ 的情况. 在这个情况下, 我们有

$$\begin{aligned} \zeta \int_{|x| \leq R} \zeta^p h u &= - \int_{|x| \leq R} \zeta^{p-2} \{p\zeta \Delta \zeta + p(p-1)|\nabla \zeta|^2\} u \\ &\leq \frac{c}{R^{2+\sigma}} \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \zeta^{p-2} h u. \end{aligned} \quad (4.18)$$

取非常大的 R , (4.18) 的右边可能被吸收进左边, 从而

$$\int_{|x| \leq R} \zeta^p h u \leq 0,$$

这就得到了 $u \equiv 0$. 也就完成了定理的证明.

正如我们之前提到的, 附录 A 的例 1 展示了定理 4.1 在没有像 (4.2) 的条件的話不一定成立. 这是另一个例子, 他强调 (4.2) 的必要性.

例 1 设

$$w(x) = \left(\frac{\mu \sqrt{n(n-2)}}{\mu^2 + |x-a|^2} \right)^{(n-2)/2}, \quad \mu > 0, a \in \mathbb{R}^n, n > 2. \quad (4.19)$$

设 $w(x)$ 在 $\alpha = (n+2)/(n-2)$ 时满足 (1.1). 如果 $\alpha < (n+2)/(n-2)$, 并且

$$h(x) = w(x)^{(n+2)/(n-2)-\alpha}. \quad (4.20)$$

那么方程

$$\Delta u + h(x)u^\alpha = 0$$

有显然的解 $u(x) = w(x)$. 由 (4.20) 定义的函数 $h(x)$ 满足

$$\Delta h = - \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right) w^{(n+6)/(n-2)-\alpha} - \left(\alpha - \frac{4}{n-2} \right) \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right) |\nabla w|^2.$$

因此在 $\alpha > 4/(n-2)$ 的时候 $\Delta h \leq 0$.

接下来一个例子和附录 A 的例 2 一样展示了定理 4.1 在有 $b_j u_j$ 项的时候不一定成立.

例 2 考虑方程

$$\Delta u + \frac{(n-2)^2}{\alpha-1} \left(\frac{n+2}{n-2} - \alpha \right) \frac{x_j}{\mu^2 + |x|^2} u_j + u^\alpha = 0 \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 上, } n > 2, \quad (4.21)$$

其中 $\mu > 0$, 且 $1 < \alpha < (n+2)/(n-2)$. 存在一个显然的解

$$u(x) = \left(\frac{\mu \sqrt{n(n-2)}}{\mu^2 + |x|^2} \right)^{2/(\alpha-1)}. \quad (4.22)$$

因此定理 4.1 不成立. 很有意思的是如果 $\alpha > n/n(n-2)$, (4.22) 在无穷远处大概是 $1/|x|^{n-2}$ 进行衰减. 方程 (4.21) 是方程

$$\begin{aligned} \Delta u + (\beta-1)(n-2) \frac{x_j}{\mu^2 + |x|^2} u_j \\ + \beta \left(\frac{\mu \sqrt{n(n-2)}}{\mu^2 + |x|^2} \right)^{((n-2)/n)(4/(n-2)-(\alpha-1)\beta)} u^\alpha = 0, \end{aligned}$$

其中 $\beta \neq 1$ 的特殊情况. 他有一个显然的解为

$$u(x) = (w(x))^\beta,$$

其中 $w(x)$ 是 (4.19) 定义的函数。

5 向量场和基本界——一般情况

在这一节里面，我们介绍一个几何向量场并且导出几本恒等式并且估计方程 (1.11) 的阶. 我们应该看到方程 (1.10) 的研究可以被简化为 (1.11) 的研究. 设 g_{ij} 是 M^n 上的度量，并且 (g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵. 对于一个局部坐标系 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M^n$ ，我们分别用 $\Gamma_{ij}^k, \nabla_i, h_{ij}, R = R_{ij}g^{ij}$ 和 Δ 表示关联度量 g_{ij} 的克里斯托费尔符号，协变导数，里奇张量，标量曲率和拉普拉斯-贝特米算子. 我们先写一些熟知的公式. 对于度量 g_{ij} ，和标量函数 f ，

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}), \quad (5.1)$$

$$f^i \equiv \nabla^i f = g^{ij} \nabla_j f = g^{ij} \partial_j f \equiv g^{ij} f_{,j}, \quad (5.2)$$

$$\Delta f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad (5.3)$$

其中 $g = \det(g_{ij})$. 设 Z_i 是向量场 Z 的分量，并且

$$Z^i = g^{ij} Z_j. \quad (5.4)$$

那么

$$\begin{aligned} \nabla_i Z^j &= \partial_i Z^j + \Gamma_{ik}^j Z^k \\ \nabla_i Z^i &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} Z^i), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\nabla_k \nabla_i Z^k - \nabla_i \nabla_k Z^k = R_{ij} Z^j, \quad (5.6)$$

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^l. \quad (5.7)$$

现在我们通过 (1.11) 简化 (1.10). 不失一般性，我们假设 $a^{ij} = a^{ji}$ ，我们需要假设 (1.10) 的线性部分是完全椭圆的，也就是说，对于一些常数 $\lambda > 0$ 和所有 n -数组 $\xi_1, \dots, \xi_n$ ，

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2. \quad (5.8)$$

设

$$b^i(x) = a^{ij}(x) \tilde{b}_j(x) - a^{ij}(x) \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_j}, \quad (5.9)$$

其中 $g = \det(a_{ij}(x))$, 并且 (a_{ij}) 是 (a^{ij}) 的逆矩阵. 可以容易得到 (1.10) 和 (1.11) 是等价的. 在这一节里面我们只研究 (1.11) .

M^n 上面的体积元素是

$$dV = \sqrt{g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad (5.10)$$

其中像一般的一样, “ $\wedge$ ” 指的是外乘法. 在这一节中所有的积分都是对于体积元 (5.10) 进行的. 协变导数的使用使得本节及后续章节的发展与第 2、3、4 节的发展平行. 分析中与之前相同的部分将不再重复, 但我们将强调新的方面, 如 M^n 的曲率作用, 以及 $f(x, u)$ 对 u 的依赖性 (也可以允许对 ∇u 有一定依赖) .

正如在第二节一样, 我们引入一个新的函数

$$u(x) = w(x)^{-(n-2)/2}, \quad (5.11)$$

它满足

$$\Delta w + b_j w^j - \frac{1}{2} n w^{-1} |dw|^2 - \frac{2}{n-2} w^{n/2} f(x, w^{-(n-2)/2}), \quad (5.12)$$

其中 $|dw|^2 \equiv w_i w^i = g^{ij} w_i w_j$ 是 w 梯度的平方. 我们基础的向量场 $\mathbf{V}$ 有分量 (对比 (2.3))

$$V^i = w^{-(n-1)} \left\{ w^j \nabla_j w^i - \frac{1}{n} w^i \Delta w \right\} \quad (5.13a)$$

$$= \frac{2}{(n-2)^2} \left\{ \nabla^i (u^{-2/(n-2)} |du|^2) + (n-2) \nabla^i (u^{-2/(n-2)}) |du|^2 + \frac{2}{n} u^{-2/(n-2)} f(x, u) u^i + \frac{2}{n} b^i u^{-2/(n-2)} u_j u^j \right\}. \quad (5.13b)$$

利用 $f(x, t)$, 我们得到

$$\begin{aligned} \delta \cdot V \equiv \nabla_i V^i &= w^{-(n-1)} \left\{ \nabla_i w^j \nabla_j w^i - \frac{1}{n} (\nabla w)^2 \right\} \\ &+ R_{ij}(x) w^{-(n-1)} w^i w^j \\ &+ \frac{(n-1)(n+2)}{n(n-2)} w^{-n/2} f(x, u) |dw|^2 - \frac{n-1}{n} w^{-(n-1)} f_t(x, u) |dw|^2 \\ &+ \frac{2(n-1)}{n(n-2)} w^{-(n-2)/2} w^i f_{x_i}(x, u) \end{aligned}$$

$$- \frac{n-1}{n} w^{-(n-1)} w^i \nabla_i (b_j w^j) - \frac{n-1}{n} w^{-n} b_j w^j |dw|^2 \quad (5.14a)$$

$$\begin{aligned} &= J(x) \\ &+ \frac{4}{(n-2)^2} R_{ij} u^{-2/(n-2)} u^i u^j \\ &+ \frac{4(n-1)}{n(n-2)^2} u^{-n/(n-2)} \left\{ -\frac{d}{dt} (t^{-(n+2)/(n-2)} f(x, t)) \Big|_{t=u} \right\} |du|^2 \\ &- \frac{4(n-1)}{n(n-2)^2} u^{-2/(n-2)} u^i f_{x_i}(x, u) \\ &- \frac{4(n-1)}{n(n-2)^2} u^{-2/(n-2)} u^i \nabla_i (b_j u^j) \\ &+ \frac{4(n-1)(n+2)}{n(n-2)^3} u^{-n/(n-2)} b_j u^j |du|^2, \end{aligned} \quad (5.14b)$$

其中

$$J(x) = w^{-(n-1)} \left\{ \nabla_i w^j \nabla_j w^i - \frac{1}{n} (\Delta w)^2 \right\} \quad (5.15a)$$

$$= w^{-(n-1)} \left[\nabla_i w_j - \frac{1}{n} (\Delta w) g_{ij} \right] \left[\nabla^j w^j - \frac{1}{n} (\Delta w) g^{ij} \right] \geq 0. \quad (5.15b)$$

在 (5.14) 和 (2.4) 之间的区别体现在里奇张量 R_{ij} . 它通过 (5.6) 进入。以下命题对命题 2.1 进行了推广。

命题 5.1. 设 Ω 是 M^n 当中的开集, 设 $\eta(x) \in C_0^\infty(M)$ 且 $\gamma \in R$. 那么

$$\begin{aligned}
& \frac{(n-2)^2}{2} \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma} J(x) + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta u^{n/(n-2)-3n\gamma/2(n-1)} \\
& \quad \times \left\{ -\frac{d}{dt} [t^{-(n+2)/(n-2)-\gamma(n+2)/2(n-1)} f(x, t)] \right\} \Big|_{t=u} |du|^2 \\
& \quad + \gamma(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |du|^4 \\
& = -2 \int_{\Omega} \eta R_{ij}(x) u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} u^i u^j \\
& \quad - \frac{2}{n} \int_{\Omega} \nabla_u \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} f(x, u) u^i + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i f_{x_i}(x, u) \\
& \quad + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} b_j u^j f(x, u) + \int_{\Omega} \Delta \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} |du|^2 \\
& \quad + 2(1-\gamma) \int_{\Omega} \nabla_i \eta u^{-\gamma-n/(n-2)} u^i |du|^2 - \left[\frac{2(n-1)}{n-2} - 3\gamma \right] \\
& \quad \times \int_{\Omega} \eta b_j u^{-\gamma-n/(n-2)} u^j |du|^2 \\
& \quad - 2 \int_{\Omega} \nabla_i \eta b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i u^j + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta b_i b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i u^j. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

证明 (5.16) 的证明十分类似定理 (2.7) 的证明.

与第 2 节相同, 我们需要一个替代形式 (5.16), 适用于所有维度的全局问题, 以及三维的局部问题. 这种替代形式包含在下一个命题中. 首先我们引入一个函数

$$\Phi(x, t) = \int_0^t ds s^{-2/(n-2)-\gamma} f(x, s). \tag{5.17}$$

命题 5.2. 设 Ω 和 η 和 5.1 里面一样. 然后, J 由 (2.10) 给出 (其中用协变导数), 我

们有

$$\begin{aligned}
& J + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta u^{n/(n-2)-3n\gamma/2(n-1)} \\
& \times \left\{ -\frac{d}{dt} \left[u^{-((n+2)/(n-2)-\gamma(n+2)/2(n-1))} f(x, t) \right] \right\} \Big|_{t=u} \\
& + \gamma(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |du|^4 \\
& = -2 \int_{\Omega} \eta R_{ij} u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i u^j + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i f_{x_i}(x, u) \\
& - \frac{2}{n(\gamma+2/(n-2))} \left[\frac{2(n-1)(n+1)}{n-2} - (2n+1)\gamma \right] \int_{\Omega} \{ \eta \nabla^i b + i\Phi + \eta b_i \Phi^{x_i} \} \\
& + \frac{2}{\gamma+2/(n-2))} \left[\frac{n-1}{n-2} - \frac{3}{2}\gamma \right] \int_{\Omega} \eta \nabla^i b_i u^{-\gamma-2/(n-2)} |du|^2 \\
& + \frac{2}{n(\gamma+2/(n-2))} \int_{\Omega} \eta \left\{ \left[\frac{2(n-1)(n+1)}{n-2} - (2n+1)\gamma \right] b_i b^j \right. \\
& - n \left[\frac{2(n-1)}{n-2} - 3\gamma \right] \nabla^j b_j \left. \right\} u^{-\gamma-2/(n-2)} u_j u^i \\
& + \frac{2}{n(\gamma+2/(n-2))} \left[\frac{2(n-1)^2}{n-2} - (2n-1)\gamma \right] \int_{\Omega} \Delta \eta \Phi \\
& + \frac{4}{n(\gamma+2/(n-2))} \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{(n-1)^2}{n-2} - \frac{2n-1}{2}\gamma \right] \eta_i \Phi^{x_i} \right. \\
& - \left[\frac{(n-1)(n+1)}{n-2} - \frac{2n+1}{2}\gamma \right] \eta^i b_i \Phi \left. \right\} \\
& + \frac{2}{\gamma+2/(n-2))} \int_{\Omega} \left\{ \left[-\frac{n-3}{n-2} + \frac{3}{2}\gamma \right] \Delta \eta \right. \\
& + \left[\frac{n-1}{n-2} - \frac{3}{2}\gamma \right] \eta^i b_i \left. \right\} u^{-\gamma-2/(n-2)} |du|^2 \\
& - \frac{4}{\gamma+2/(n-2))} \int_{\Omega} \left\{ -(1-\gamma) \nabla^j \eta_i + 2 \left[\frac{n-1}{n-2} - \gamma \right] \eta^j b_i \right\} u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i u_j.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

在我们给出 (5.18) 的证明之前, 我们给出引理 2.1 的一个推论.

引理 5.1. 设 $\mathbf{I}$ 和 γ 像命题 5.1. 设 Z 是一个分量为 $Z_i \in C_0^\infty(\Omega)$. 那么

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Z_i \nabla^i (u^{-2/(n-2)-\gamma}) |du|^2 &= \int_{\Omega} \nabla^i Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} |du|^2 - 2 \int_{\Omega} \nabla^j Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u_j \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla^i Z_i \Phi(x, u) - 2 \int_{\Omega} Z_i \Phi^{x_i}(x, u) \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} Z_i b^j u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u_j. \end{aligned} \quad (5.19)$$

证明 正如在引理 2.1 当中一样, 我们考虑

$$- \int_{\Omega} \nabla^j (Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i) u_j + \int_{\Omega} Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i b_j u^j + \int_{\Omega} Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i f = 0,$$

并利用

$$\begin{aligned} \nabla^j (Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i) &= \frac{1}{2} \nabla^i (Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} |du|^2) - \frac{1}{2} \nabla^i Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} |du|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} Z_i \nabla^i (u^{-2/(n-2)-\gamma}) |du|^2 + \nabla^j Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u_j, \end{aligned} \quad (5.20)$$

以及

$$Z_i u^{-2/(n-2)-\gamma} f u^i = Z_i \Phi_i u^i = \nabla^i (Z_i \Phi) - \nabla^j Z_i \Phi - Z_i \Phi^{x_i}. \quad (5.21)$$

命题 5.2 的证明 正如在命题 2.2 当中一样, 我们考虑 (5.16) 的如下替代:

$$\begin{aligned} \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} b_j u^{-2/(n-2)-\gamma} u^j f(x, u) \\ = - \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \{ (\eta^i b_i + \eta \nabla^i b_i) \Phi + \eta b_i \Phi^{x_i} \}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$- \frac{2}{n} \int_{\Omega} \eta_i u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i f = \frac{2}{n} \int_{\Omega} \{ \Delta \eta \Phi + \eta_i \Phi^{x_i} \}, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} 2(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta_i u^{-n/(n-2)-\gamma} u^i |du|^2 \\ = - \frac{2(1-\gamma)}{2/(n-2)+\gamma} \left\{ \int_{\Omega} \Delta \eta u^{-2/(n-2)-\gamma} |du|^2 - 2 \int_{\Omega} \Delta \eta \Phi \right. \\ \left. - 2 \int_{\Omega} \nabla_j \eta_i u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u^j - 2 \int_{\Omega} \eta_i \Phi^{x_i} + 2 \int_{\Omega} \eta_i b_j u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u^j \right\}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

以及

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{2(n-1)}{n-2} - 3\gamma \right] \int_{\Omega} \eta b_i u^{-n/(n-2)-\gamma} u^i |du|^2 \\
& = \frac{2(n-1)/(n-2) - 3\gamma}{2/(n-2) + \gamma} \left\{ \int_{\Omega} (\eta^i b_i + \eta \nabla^i b_i) u^{-2/(n-2)-\gamma} |du|^2 \right. \\
& \quad - 2 \int_{\Omega} (\eta^i b_i + \eta \nabla^i b_i) \Phi - 2 \int_{\Omega} (\eta^i b_j + \eta \nabla^i b_j) u^{-2/(n-2)-\gamma} u^j u_i \\
& \quad \left. - 2 \int_{\Omega} \eta b_i \Phi^{x_i} + 2 \int_{\Omega} \eta b_i b_j u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u^j \right\}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

把 (5.22) - (5.25) 代入 (5.16) 当中, 我们的到了 (5.18) .

下一个命题对命题 2.3 进行了推广. 它包含了将对非线性 $f(x, u)$ 施加的主要技术条件. 注意下文界 (5.31) 与第 2 节中类似的 (2.25) 表述不同.

命题 5.3. 设 Ω 是 $M^n (n > 2)$ 上的有界开区域, 设

$$\begin{aligned}
& \zeta \in C_0^\infty(\Omega), \\
& 0 \leq \zeta(x) \leq 1.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

设 $f(x, u)$ 是一个非负的函数满足 (i)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \{ t^{-((n+2)/(n-2)-\delta)} f(x, t) \} \geq 0 \tag{5.27}$$

对于一些 $\delta > 0$ 和一切 $t \geq 0$ 成立, (ii)

$$|\nabla_i [\log f(x, u)]| \leq j(x) \tag{5.28}$$

对于一些不依赖 u 的正函数 $j(x)$ 成立. 那么:

(a) 对于 $n \geq 4$ 和足够小的正数 γ , 存在正常数 c 和一个很大的 p 满足 (其中 J 由 (2.10) 给出)

$$\begin{aligned}
& J + c \int_{\Omega} \zeta^p f^2(x, u) u^{-2/(n-2)-\gamma} + c \int_{\Omega} \zeta^p u^{-2(n-1)/(n-2)-\gamma} |du|^4 \\
& \leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [(|\Delta \zeta| + |d\zeta|^2)^2 + |R|^2 + |j(x)|^4 \\
& \quad + |d\zeta|^2 |b|^2 + |b|^4] u^{2(n-3)/(n-2)-\gamma},
\end{aligned} \tag{5.31}$$

其中

$$|R|^2 = R_{ij}R^{ij}. \quad (5.32)$$

(b) 对于 $n = 3$, 存在正常数 c 和一些 $p > 2$ 使得

$$\begin{aligned} J + c \int_{\Omega} \zeta^p f^2(x, u) u^{-2} &\leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-1} [|d\zeta|^2 + |d\zeta||j(x)| + |d\zeta||b| + |j(x)|^2 \\ &\quad + |j(x)||b| + |db| + |b|^2] f(x, u) u^{-1} \\ &\quad + c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} [|D^2\zeta| + |R| + |d\zeta||b| + |Db| + |b|^2] u^{-2} |du|^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

证明 从 (5.27) 当中我们得到

$$u f_t(x, u) \leq \left(\frac{n+2}{n-2} - \delta \right) f(x, u). \quad (5.34)$$

利用这个事实, 我们可以给出 (5.16), (5.18) 左端第二项的界限:

$$\begin{aligned} &\frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta u^{n/(n-2)-\gamma/2(n-1)} \\ &\quad \times \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} [t^{-(n-2)/(n+2)-\gamma(n+2)/2(n-1)} f(x, t)] \right\} \Big|_{t=u} |du|^2 \\ &\geq \frac{2(n-1)}{n} \left[\delta - \gamma \frac{n+2}{2(n-1)} \right] \int_{\Omega} \eta u^{-n/(n-2)-\gamma} f(x, u) |du|^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

对于给定的 $\delta > 0$, 我们选取 γ 满足

$$\delta - \gamma \frac{n+2}{2(n-1)} > 0. \quad (5.36)$$

我们现在按照命题 2.3 的证明方式进行. 首先我们考虑 $n \geq 4$ 的情形, 并且利用 (5.16) 和 (5.35). 对于足够小的 θ , $\eta = \zeta^p (p > 4)$,

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{n} \int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma-2/(n-2)} f(x, u) u^i + \frac{2(n-1)}{n} \\ &\quad \times \int_{\Omega} \eta (b_i + \nabla_i \log f) u^{-\gamma-2/(n-2)} f(x, u) u^i \\ &\leq c \theta^2 \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-n/(n-2)} f(x, u) |du|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c}{\theta^2} \int_{\Omega} \zeta^{p-2} (|d\zeta|^2 + |j(x)|^2 + |b|^2) f(x, u) u^{-\gamma+(n-4)/(n-2)} \\
& - 2 \int_{\Omega} \eta R_{ij} u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i u^j + \int_{\Omega} \Delta \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} |du|^2 \\
& - 2 \int_{\Omega} \eta_i b^j u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i u_j + \frac{2(n-1)}{n} \int_{\Omega} \eta b_i b^j u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i u_j \\
& \leq c \theta^2 \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |du|^4 + \frac{c}{\theta^2} \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [(|\Delta \zeta| + |d\zeta|^2)^2 \\
& + |R|^2 + |d\eta|^2 |b|^2 + |b|^4] u^{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
& 2(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta_i u^{-\gamma-n/(n-2)} u^i |du|^2 - \left[\frac{2(n-1)}{n-2} - 3\gamma \right] \int_{\Omega} \eta b_j u^{-\gamma-n/(n-2)} u^j |du|^2 \\
& \leq c \theta^{4/3} \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |du|^4 \\
& + \frac{c}{\theta^4} \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [|d\zeta|^4 + |b|^4] u^{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

对比 (5.16), (5.35) 和 (5.37) - (5.39), 我们得到, 对于正的常数 c (对比 (2.34)),

$$\begin{aligned}
& J + c \int_{\Omega} \zeta^p f u^{-\gamma-n/(n-2)} |du|^2 + c \int_{\Omega} \zeta^p u^{-\gamma-2(n-1)/(n-2)} |du|^4 \\
& \leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} (|d\zeta|^2 + |j(x)|^2 + |b|^2) f(x, u) u^{-\gamma+(n-4)/(n-2)} \\
& + c \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [(|\Delta \zeta| + |d\zeta|^2)^2 + |R|^2 + |d\zeta|^2 |b|^2 + |b|^4] u^{-\gamma+2(n-3)/(n-2)}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

接下来是引理 2.2 的推广.

引理 5.2. 如果 $f(x, u)$ 满足 (5.27), 那么

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \eta f^2 u^{-\gamma-2/(n-2)} - \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i f_{x_i}(x, u) \\
& + \int_{\Omega} \eta b_j u^{-\gamma-2/(n-2)} f u^j - \int_{\Omega} \eta_i f u^{-\gamma-2/(n-2)} u^i \\
& = \int_{\Omega} \eta u^{-\gamma-n/(n-2)} \left[u f_t(x, u) - \left(\gamma + \frac{2}{n-2} \right) f \right] |du|^2 \\
& \leq \left(\frac{2}{n-2} - \delta - \gamma \right) \int_{\Omega} \eta f^{-\gamma-n/(n-2)} |du|^2.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

证明 考虑

$$\int_{\Omega} \eta f(x, u) u^{-\gamma-2/(n-2)} (\Delta u + b_i u^j + f) = 0$$

并且利用散度定理; (5.41b) 可以由 (5.41a) 通过 (5.34) 得到.

把 (5.40) 和 (5.14b) 对比, 再次利用 (5.37), 我们得到

$$\begin{aligned} J + c \int_{\Omega} \zeta^p f^2 u^{-2/(n-2)-\gamma} + c \int_{\Omega} \zeta^p u^{-2(n-1)/(n-2)} |du|^4 \\ \leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} [|d\zeta|^2 + |j(x)|^2 + |b|^2] f(x, u) u^{(n-4)/(n-2)-\gamma} \\ + c \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [(|\Delta\zeta| + |d\zeta|^2)^2 + |R|^2 \\ + |d\zeta|^2 |b|^2 + |b|^4] u^{2(n-3)/(n-2)-\gamma}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

对 $p = q = 2$ 利用 (2.27), 并且假设 θ 足够小, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta^{p-2} [|d\zeta|^2 + |j(x)|^2 + |b|^2] f(x, u) u^{(n-4)/(n-2)-\gamma} \\ \leq c\theta^2 \int_{\Omega} \zeta^p f^2(x, u) u^{-2/(n-2)-\gamma} \\ + \frac{c}{\theta^2} \int_{\Omega} \zeta^{p-4} [|d\zeta|^2 + |j(x)|^2 + |b|^2]^2 u^{2(n-3)/(n-2)-\gamma}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

对比 (5.42) 和 (5.43) 我们得到 (5.32) .

对于 $n = 3$ 的情况, 类似于命题 2.3 当中写的那样.

6 全局与局部结果——一般情况

本节我们建立了方程 (1.10) 和 6.1 的全局和局部结果. 关于紧流形的一些全局结果见附录 B.

6.1 我们先展示全局结果, 定理 6.1 推广了定理 4.1.

定理 6.1. 设 $M^n (n > 2)$ 是一个 n -维完备黎曼流形且有非负里奇张量 R_{ij} . 设 Δ 是 M^n 上面的拉普拉斯-贝特米算子, 而 $u(x)$ 是方程

$$\Delta u + f(x, u) = 0, \quad \text{在 } M^n \quad (6.1)$$

的非负 C^2 解. 假设 f 是非线性的, 并且满足 (i) 对于一些 $(n+2)/(n-2) > \delta > 0$ 以及一切 $t \geq 0$,

$$-\frac{d}{dt} [t^{-(n+2)/(n-2)-\delta} f(x, t)] \geq 0. \quad (6.2)$$

(ii) 对于固定的 $t \geq 0$,

$$\Delta_x f(x, t) \geq 0. \quad (6.3)$$

(iii) 设 $r = r(x)$ 是 M 上到固定点 P 的距离, 假设对于一切 $t \geq 0$,

$$|d_x \log f(x, t)| \leq \frac{c}{r}, \quad \text{其中 } r \rightarrow +\infty. \quad (6.4)$$

(iv) 对于 $n \geq 4$, 假设

$$ch(x)u^\beta \leq f(x, u), \quad c > 0, \quad (6.5a)$$

其中

$$1 < \beta < \frac{n+2}{n-2}, \quad (6.5b)$$

并且当 $r \rightarrow +\infty$ 的时候,

$$cr^\sigma \leq h(x), \quad c > 0 \quad (6.6a)$$

$$\sigma > -\frac{2}{n-3}. \quad (6.6b)$$

(v) 对于一下 $c > 0$,

$$\Phi(x, t) = \int_0^t s^{-2/(n-2)-\gamma} f(x, s) \leq cf(x, t)t^{(n-4)/(n-2)-\gamma}, \quad (6.7)$$

那么

$$u(x) \equiv 0.$$

注记. 1. 条件 (6.7) 可以被形如

$$f(x, u) \leq h(x)u^\alpha$$

的上界条件取代, 其中

$$1 < \frac{\alpha+1}{2} < \beta \leq \alpha < \frac{n+2}{n-2}.$$

2. 条件 (iii) 在三维情况不是必须的.

首先, 我们需要得到如下熟知的结论 (参见 [3]).

命题 6.1. 设 M 是一个 n - 维黎曼流形. 设 $V(r)$ 是半径为 r 的测地球体积. 设 $O(M)$ 是最小的数字满足

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{V(r)}{r^{O(M)}} < +\infty.$$

如果 M 有非负里奇曲率, 那么

$$O(M) \leq n. \quad (6.9)$$

定理 6.1 的证明 这个证明和定理 4.1 的证明一样. 我们对 $b_j(x) \equiv 0$ 使用 (5.18), 并且利用它的体积项: 首先,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i f_{x_i}(x, u) &= \int_{\Omega} \eta \Phi_{x_i, t}(x, u) u^i \\ &= - \int_{\Omega} \eta \Delta_x \Phi(x, u) - \int_{\Omega} \eta_i \Phi^{x_i}(x, u). \end{aligned} \quad (6.10)$$

第二, 我们利用 (5.35) 和 (5.41b) 去估计 (5.18) 左边的第二项的下节. 正如在 (5.42) 的证明中一样, 这和 (6.10) 一起得到, 对于 $n \geq 4 (c > 0)$ 的时候,

$$\begin{aligned} J + c \int_{\Omega} \zeta^P f^2(x, u) u^{-2/(n-2)-\gamma} + c \int_{\Omega} \zeta^p u^{-2(n-1)/(n-2)-\gamma} |du|^4 \\ \leq -2 \int_{\Omega} \zeta^p R_{ij} u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u^j - c \int_{\Omega} \zeta^p \Delta_x \Phi(x, u) \\ + c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} |d\zeta|^2 f(x, u) u^{(n-4)/(n-2)-\gamma} \\ + c \int_{\Omega} \zeta^{p-1} |d\zeta| |j(x)| \int_0^{u(x)} ds s^{-2/(n-2)-\gamma} f(x, s) \\ + c \int_{\Omega} \zeta^{p-4} (|\Delta\zeta| + |d\zeta|^2)^2 u^{2(n-3)/(n-2)-\gamma}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

以及对于 $n = 3$ (正如 (5.43) 的证明一样)

$$\begin{aligned} J + c \int_{\Omega} \zeta^p f^2(x, u) u^{-2} &\leq -2 \int_{\Omega} \zeta^p R_{ij} u^{-2} u^i u^j \\ &\quad + c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} |d\zeta|^2 f(x, u) u^{-1} \\ &\quad + c \int_{\Omega} \zeta^{p-1} |d\zeta| |j(x)| \int_0^{u(x)} ds s^{-2} f(x, s) \\ &\quad + c \int_{\Omega} \zeta^{p-2} |D^2\zeta| u^{-2} |du|^2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

利用 $R_{ij}u^i u^j \geq 0$ 的事实, 以及 (6.3), 并且对 $p = q = 2$ 使用 (2.27), 估计 (6.11) 就得到

$$\begin{aligned} J + c \int_{\Omega} \zeta^p f^2(x, u) u^{-2/(n-2)-\gamma} + c \int_{\Omega} \zeta^p u^{-2(n-1)/(n-2)-\gamma} |du|^4 \\ \leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-1} |d\zeta| |j(x)| \int_0^{u(x)} ds s^{-2/(n-2)-\gamma} f(x, s) \end{aligned} \quad (6.13a)$$

$$\begin{aligned} + c \int_{\Omega} \zeta^{p-4} (|\Delta\zeta| + |d\zeta|^2)^2 u^{2(n-3)/(n-2)-\gamma} \\ \leq c \int_{\Omega} \zeta^{p-1} |d\zeta| |j(x)| f(x, u) u^{(n-4)/(n-2)-\gamma} \\ + c \int_{\Omega} \zeta^{p-4} (|\Delta\zeta| + |d\zeta|^2)^2 u^{2(n-3)/(n-2)-\gamma}. \end{aligned} \quad (6.13b)$$

从 (6.13a) 到 (6.13b) 用的是 (6.7), 利用 (2.27) 去吸收 (6.13b) 的右边第一项, 然后 (6.5), 我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta^p h^2(x) u^{2\beta-2/(n-2)-\gamma} \\ \leq c \int_{\Omega} (|\Delta\zeta| + |d\zeta|^2 + |d\zeta| |j(x)|)^{(2\beta-2/(n-2)-\gamma)/(\beta-1)} \\ \times h^{-(\gamma+2(n-3)/(n-2))/(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

接下来, 我们选取 Ω 是半径为 R 的测地球, $\zeta(x)$ 满足 (4.10). 利用 (6.6) 和 (6.9), 一个直接的计算表明 (6.14) 的有段在 $R \rightarrow +\infty$ 的时候趋于零. 这给出了 $n \geq 4$ 的定理. 对于 $n = 3$, 我们从 (6.12) 开始, 按照定理 4.1 的证明进行. 由于没有新的想法, 细节留给读者自行处理.

定理 1.2 是定理 6.1 的推论, 我们还能给出另一个推论.

推论 6.1. 设 $M^n (n > 2)$ 是一个 n -维完备黎曼流形, 且有非负里奇曲率. 所有正的 C^2 调和函数在 M^n 上面都是常数.

注记. 这个推论利用完全不同的方法在 [16] 当中被证明.

通过将 (5.35) 和 (5.41b) 结合, 界定 (5.18) 的左边, 可以获得其他全局结

果。使用 (5.21), 经过简单计算后,

$$\begin{aligned}
& J + \frac{2(n-1)}{n} \left[\delta - \gamma \frac{n+2}{2(n-1)} \right] \frac{1}{n/(n-2) - \delta - \gamma} \\
& \quad \times \int_{\Omega} \eta f^2(x, u) u^{-2/(n-2)-\gamma} + \gamma(1-\gamma) \int_{\Omega} \eta u^{-2(n-1)/(n-2)-\gamma} |du|^4 \\
& \leq -2 \int_{\Omega} \eta R_{ij} u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u^j \\
& \quad - \frac{2(n-1)}{n} \left\{ \left[\delta - \gamma \frac{n+2}{2(n-1)} \right] \frac{1}{n/(n-2) - \delta - \gamma} + 1 \right\} \int_{\Omega} \eta \Delta_x \Phi \\
& \quad - \left\{ \frac{2}{n(2/(n-2) + \gamma)} \left[\frac{2(n-1)(n+1)}{n-2} - (2n+1)\gamma \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2(n-1)}{n} \left[\delta - \gamma \frac{n+2}{2(n-1)} \right] \frac{1}{n/(n-2) - \delta - \gamma} \right\} \\
& \quad \times \int_{\Omega} (\eta \nabla^i b_i \Phi + \eta b_i \Phi^{x_i}) - \frac{2}{2/(n-2) + \gamma} \\
& \quad \times \int_{\Omega} \eta \left\{ - \left[\frac{n-1}{n-2} - \frac{3}{2}\gamma \right] \nabla^k b_k \delta_i^j + \left[\frac{2(n-1)}{n-2} - 3\gamma \right] \nabla^j b_i \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{2(n-1)(n+1)}{n(n-2)} - \frac{2n+1}{n}\gamma \right] b_i b^j \right\} \\
& \quad \times u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u_j \\
& \quad + \int_{\Omega} (c_1 \eta_i \Phi^{x_i} + c_2 \eta^i b_i \Phi) + \int_{\Omega} (c_3 \Delta \eta + c_4 \eta_i b^i) u^{-2/(n-2)-\gamma} |du|^2 \\
& \quad + \int_{\Omega} (c_5 \nabla^i \eta_i + c_6 \eta^i b_j) u^{-2/(n-2)-\gamma} u^i u^j,
\end{aligned} \tag{6.16}$$

其中常数 c_i 不一定是正的. (6.16) 右侧的前四项是体积项, 其余为表面项. 表面项的控制方式与之前相同. 当体积项为非正时, 得到全局结果.

定理 6.2. 设 M^n 是一个 n -维完备黎曼流形, 其中 $n > 2$ 且里奇张量 R_{ij} 非负. 假设 $u(x)$ 是方程

$$\Delta u + bu = 0, \quad \text{在 } M^n \text{ 上, } n > 2 \tag{6.17}$$

的一个非负 C^2 解, 其中 $b(x)$ 是一个向量场. 设 $r = r(x)$ 是在 M 上到固定点 P_0 的距离函数, 并且假设

$$|b(x)| \leq \frac{c}{r}, \quad \text{其中 } r \rightarrow +\infty \tag{6.18}$$

对于 $n \geq 3$ 的情况成立. 对于 $n = 3$ 的情形, 进一步假设 $r \rightarrow +\infty$ 的时候 $|\nabla b| \leq c/r^2$. 那么如果有着局部坐标的向量场

$$-\frac{1}{2}(\nabla^k b_k)g_i^j + \nabla^j b_i - \frac{n+1}{n}b_i b^j \quad (6.19)$$

是正定的, 那么 $u \equiv$ 一个常数.

证明 我们对于 $f \equiv 0$ 和半径为 R 的测地球 Ω 使用 (6.16). 因为 M^n 有非负里奇张量, 这和 (6.18) 一起可证明 (如定理 6.1 所示) 表面项在 $R \rightarrow +\infty$ 时趋零. 那么 (6.19) 和 $R_{ij} \geq 0$ 一起得到了 (6.14) 右边的体积项是非正的, 就得到了定理.

注记. 我们目前不知道关于完备黎曼流形线性方程 (6.5) 的其他刘维尔型定理.

6.2 在本小节中, 我们将呈现方程 (1.10) 和 (1.11) 的局部结果. 这些方程的结果 (及其证明) 是相同的. 事实上, 方程 (1.11) 的黎曼流形 M 不必是完备的. 我们只陈述方程 (1.10) 的结果. 大部分证明与第三部分相同. 因此, 我们只指出与第三节不同的证明部分. 主要区别在于下文定理 6.4 中奇点阶数的刻画.

接下来的定理推广了定理 3.1.

定理 6.3. 设 $u(x)$ 是 (1.10) 在 $0 < |x| < R$ 上的一个非负 C^2 解. 假设系数 a^{ij} 是 $C^2(0 < |x| \leq R) \cap L^\infty$ 的并且满足 (5.8). 同时假设里奇曲率 (对于度量 $g^{ij} = a^{ij}$) 满足

$$|R_{ij}(x)| \leq \frac{c}{|x|^2}, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近.} \quad (6.20)$$

我们假设非线性函数 $f(x, u)$ 满足: (i) 对于一些 $\delta > 0$,

$$-\frac{d}{dt} [t^{-(n+2)/(n-2)-\delta} f(x, y)] \geq 0 \quad \text{对一切 } t \geq 0. \quad (6.21)$$

(ii) 对于一切 $t \geq 0$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \log f(x, t) \right| \leq \frac{c}{|x|}, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近.} \quad (6.22)$$

(iii) 对于 $n \geq 4$ (三维情况不用这个 f 的条件),

$$c_1 h(x) u^\alpha \leq f(x, u) \leq c_2 h(x) u^\alpha, \quad c_1, c_2 > 0 \quad (6.23)$$

对于大的 u 成立, 并且

$$1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}. \quad (6.24)$$

这里 $h(x)$ 是非负函数并且对一些 $c > 0$,

$$c|x|^\sigma \leq h(x) \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}, \quad (6.25)$$

其中 σ 是一个实数.

对于系数 $\tilde{b}_j$ 满足, 对于 $n \geq 3$,

$$|\tilde{b}_j(x)| \leq \frac{c}{|x|}, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}, \quad (6.26)$$

并且对于 $n = 3$ 进一步假设

$$|D\tilde{b}_j(x)| \leq \frac{c}{|x|^2}, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}. \quad (6.27)$$

那么:

(a) (哈纳克不等式) 存在 $\theta_0 > 0$ 使得对于一切 $0 < \theta \leq \theta_0$, 足够小的 $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{\varepsilon \leq |x| \leq (1+\theta)\varepsilon} u(x) \leq c \inf_{\varepsilon \leq |x| \leq (1+\theta)\varepsilon} u(x) \quad (6.28)$$

对于一个独立于 ε, θ 和 u 的常数 c 成立.

(b) 如果 $n = 3$ 的时候, 我们假设 (取代了条件 (iii)),

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{h(x)u^\alpha} \geq c > 0, \quad (6.29)$$

其中 $h(x)$ 满足 (6.29) 并且 α 满足 (6.24), 那么对于一些 $n \geq 3$,

$$u(x) \leq \frac{c}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}. \quad (6.30)$$

注记. 有趣的是, 哈纳克不等式 (6.28) 在三维空间中无条件成立 (iii)。我们相信在更高维度中也应如此。此外, 我们怀疑仅假设 (6.29) (非条件 (iii)) 时, 即使对 $n \geq 4$, 上界 (6.30) 也应成立。

定理 6.3 的证明 $f(x, u)$ 的条件 (iii) 让 $n \geq 4$ 情况的证明和定理 3.1 的证明类似. 由于这个原因我们只考虑 $n = 3$ 的情况. 正如在引理 3.1 当中的证明一样 (参见 (3.11) 的证明), 基本估计 (5.33) 给出

$$\int_{\varepsilon \leq |x| < R} f^2(x, u) u^{-2} \leq \frac{C}{\varepsilon}. \quad (5.31)$$

从中我们得到, 利用赫尔德不等式,

$$\int_{\varepsilon < |x| < M\varepsilon} (f(x, u) u^{-1})^{3/(2-\delta)} \leq c\varepsilon^{-3\delta/(2-\delta)}, \quad 0 < \delta \leq 1, M > 1. \quad (6.32)$$

这足以证明哈纳克不等式 (结合 (3.14) 和 (3.18), 如定理 3.1 的证明). 为了证明 (6.30), 我们指出, 通过 (6.29), (6.31) 和 (6.25), 我们得到

$$\int_{\varepsilon < |x| < M\varepsilon} u^{2\alpha-2} \leq \frac{C}{\varepsilon^{1+2\sigma}}.$$

利用此方法和弱哈纳克不等式 (3.18), 我们完成了定理 3.1 中的证明.

推论 3.2、3.3 以及定理 3.2 和 3.5 也适用于方程 (1.7), 前提是我们假设定理 6.1 的条件 (条件 (iii) 现对所有 $n \geq 3$ 都假设). 由于本案中这些结果的陈述与第 3 节相同, 我们此处不重复. 本案中孤立奇点的分类需要某种特殊的处理, 我们对此进行了明确考虑.

定理 6.4. 设 $u(x)$ 是 $0 < |x| \leq R$ 上方程 (1.7) 的解. 假设 $a^{ij}(x)$, $\tilde{b}_j(x)$ 和 $f(x, u)$ 满足定理 6.3 的条件 (条件 (iii) 对于 $n \geq 3$ 是需要的). 进一步我们假设 $\tilde{b}_j$ 满足 (3.20). 考虑 $1 < (n + \sigma)/(n - 2) < \alpha < (n + 2)/(n - 2)$. 那么要么零点处的奇点可去, 要么存在正常数 c, c_1, c_2 , 使得

$$\frac{c_1}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}} \leq u(x) \leq \frac{c_2}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}. \quad (6.33)$$

更进一步, 如果附加假设系数 $a^{ij}(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 并且

$$f(x, u) \sim h(0)|x|^\sigma, \quad \text{当 } x \rightarrow 0,$$

其中 α 和 σ 满足 (3.45), 并且

$$|b_j(x)| = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{当 } x \rightarrow 0,$$

那么

$$\|x\|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}u(x) \rightarrow C_0, \quad \text{当 } x \rightarrow 0, \quad (6.34)$$

其中 C_0 由 (3.46b) 给出, 并且 $\|x\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}(0)x_i x_j$.

证明 如果 (6.33) 不成立, 那么正如在定理 3.3 的证明中一样,

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)}}\right), \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}. \quad (6.35)$$

我们将证明这意味着 (3.21), 因此奇点是可去除的. 这里的主要问题是找到下面给出的函数 φ 的对应物, 可以用来在 ε 下均匀地界定 (3.36) 的右边. 我们构造这样的函数如下: 考虑强椭圆算子

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

其中 a^{ij} 是有界系数. 设 $g(x, y)$ 是算子 L 在球 $B_R(x: |x| < R)$ 上的格林函数; $g(x, y)$ 满足

$$Lg = \delta_y,$$

并且在 $|x| = R$ 上面消失. 者在 [9] 当中得到 $g(x, y)$ 满足

$$\frac{c_1}{|x-y|^{n-2}} \leq g(x, y) \leq \frac{c_2}{|x-y|^{n-2}}, \quad c_1, c_2 > 0 \quad (6.36)$$

对于一切 $x, y \in B_R$ 成立. 设

$$\mu = \frac{n-2}{\alpha-1} \left(\alpha - \frac{n+\sigma}{n-2} \right) \quad (6.37)$$

并且定义函数

$$\varphi(x) = \int_{B_R} g(x, y) \frac{1}{|y|^{2+\sigma}} dy.$$

那么 $\varphi(x)$ 满足

$$L\varphi \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{|x|^{2+\mu}}. \quad (6.39)$$

我们现在得到

$$\varphi(x) = O(|x|^{-((n-2)/(\alpha-1))(\alpha-(n+\sigma)/(n-2))}) \quad \text{在 } x = 0 \text{ 附近}. \quad (6.40)$$

利用 (6.36) 我们得到

$$c_1 \int_{B_R} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{2+\mu}} dy \leq \varphi(x) \leq c_2 \int_{B_R} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{2+\mu}} dy. \quad (6.41)$$

我们需要去估计右侧：令

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{2+\mu}} dy = I_1 + I_2 + I_3,$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\substack{|y| < 2|x| \\ |y-x| < |x|/2}} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{2+\mu}} dy, \\ I_2 &= \int_{\substack{|y| < 2|x| \\ |y-x| > |x|/2}} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{2+\mu}} dy, \\ I_3 &= \int_{R > |y| > 2|x|} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{2+\mu}} dy. \end{aligned}$$

为了估计 I_1 ，我们发现 $|y-x| < \frac{1}{2}|x|, |y| < 2|x|$ 得到 $\frac{1}{2}|x| < |y| < 2|x|$. 因此

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c \frac{1}{|x|^{2+\mu}} \int_{|y-x| < |x|/2} dy \frac{1}{|x-y|^{n-2}} = c \frac{1}{|x|^{2+\mu}} \int_{|z| < |x|/2} dz \frac{1}{|z|^{n-2}} \\ &\leq c \frac{1}{|x|^\mu}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

对于 I_2 我们有

$$I_2 \leq c \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{|y| < 2|x|} dy \frac{1}{|y|^{2+\mu}} = \frac{c}{|x|^\mu}. \quad (6.43)$$

对于 I_3 我们注意到 $|y-x| \leq |y| + |x| \leq \frac{3}{2}|y|$. 因此

$$I_3 \leq c \int_{2|x| < |y| < R} dy \frac{1}{|x-y|^{n+\mu}} = c \int_{2|x| < |x-z| < R} dz \frac{1}{|z|^{n+\mu}} \leq \frac{c}{|x|^\mu}. \quad (6.44)$$

结合 (6.42) - (6.44)，我们得到

$$\varphi(x) \leq \frac{c}{|x|^\mu}. \quad (6.45)$$

这就是 (6.40). 我们现在像在定理 3.1 一样推进. 设 $\zeta \in C_0^\infty(\varepsilon < |x| < R)$ 满足 (3.7). 考虑

$$\int_{\varepsilon < |x| < R} \zeta(x) \varphi(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) + \tilde{b}_i u_j + f(x, u) \right\} = 0.$$

利用散度定理,

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon < |x| < R} \zeta u \varphi \left\{ -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - f(x, u) u^{-1} \right\} \\ &= \int_{\varepsilon < |x| < R} u \varphi \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{ij} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) \\ & \quad + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} u \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} a^{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\varepsilon < |x| < R} \zeta \varphi \tilde{b}_j u_j. \end{aligned} \quad (6.46)$$

利用 (6.4), 可以证明 (6.46) 右侧的第一项和第三项, 如定理 3.1 的证明所示, 在 ε 均匀有界. 第二项可以被如下估计:

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon < |x| < R} u \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} a^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \leq c \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 2\varepsilon} |\nabla \zeta| |\nabla \varphi| u \\ & \leq c \varepsilon^{-1} \varepsilon^{-(2+\sigma)/(\alpha-1)} \varepsilon^{n/2} \left(\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 2\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (6.47)$$

设 $\eta \in H_0^1(B_R - \{0\})$ 满足

$$\eta = \begin{cases} 0, & |x| < \frac{1}{2}\varepsilon, |x| > 4\varepsilon; \\ 1, & \varepsilon < |x| < 2\varepsilon. \end{cases}$$

考虑

$$\int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} \eta^2 \varphi \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{|x|^{2+\mu}} \right\} = 0.$$

通过分部积分、利用椭圆性和杨不等式 (2.27), 我们很快得到

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} \leq c \int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} \eta \varphi |\nabla \eta| |\nabla \varphi| + \int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} \eta^2 \varphi \frac{1}{|x|^{2+\mu}} \\ & \leq c \theta^2 \int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} \eta^2 |\nabla \varphi|^2 + \frac{c}{\theta^2} \int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} |\nabla \eta|^2 \varphi^2 \\ & \quad + \int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} \eta^2 \varphi \frac{1}{|x|^{2+\mu}}. \end{aligned}$$

选择足够小的 θ 并且利用 (6.40), 我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x| < 2\varepsilon} \eta^2 |\nabla \varphi|^2 &\leq c \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} \frac{1}{|x|^{2\mu}} dx + c \int_{\varepsilon/2 < |x| < 4\varepsilon} \frac{1}{|x|^{2+2\mu}} dx \\ &\leq c \varepsilon^{n-2-2\mu}. \end{aligned}$$

这和 (6.47) 一起得到

$$\left| \int_{\varepsilon < |x| < R} u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} a^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq c e^{-(2+\sigma)/(\alpha-1) + (n-2)/2 + (n-2-2\mu)/2} = c < +\infty.$$

因此 (6.46) 的右边在 ε 下一致有界. 通过 (6.35), 我们得到 $\varphi f(x, u) u^{-1} = o(1/|x|^{2+\mu})$, 同样, 利用 (6.40) 和 (6.39), $L\varphi = O(1/|x|^{2+\mu})$. 因此 (3.6) 的右边在 ε 下是一致有界的. 这就完成了 (6.33) 的证明. (6.34) 的证明和 (3.45) 类似. 我们定义伸缩函数

$$u^\lambda(x) = \lambda^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} u(\lambda x)$$

满足 (对比 (3.47))

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(\lambda x) \frac{\partial u^\lambda}{\partial x_j} \right) + \lambda \tilde{b}_j(\lambda x) u^\lambda(x) + \lambda^{-\sigma} f(\lambda x, u^\lambda(x)) = 0.$$

正如在定理 3.4 的证明一样, 我们指出给一个序列 $\{\lambda_k\} \rightarrow 0$, 存在一个子列 $\{\lambda_k\}$ 是的 $u^{\lambda_k}(x) \rightarrow u(x)$, 其中 $u(x)$ 满足

$$a^{ij}(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + h(0) |x|^\sigma u^\alpha = 0.$$

设 $A = (a_{ij}(0))$ 并且 $A^{-1} = (a^{ij}(0))$. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值, 且

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

设 B 是非奇异的矩阵, 且转置为 B^T , 使得

$$BA^{-1}B^T = \Lambda^{-1}.$$

我们做如下变换

$$y = Bx$$

并且

$$z_j = \sqrt{\lambda_j} y_j.$$

那么

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} + h(0)|x|^\sigma u^\alpha = 0.$$

这得到，正如在定理 3.4 一样，

$$|z|^{(2+\sigma)/(\alpha-1)} u \rightarrow C_0, \quad \text{当 } z \rightarrow 0.$$

容易的计算可以得到

$$|z|^2 = \|x\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}(0) x_i x_j.$$

这就完成了定理的证明.

注记. 类似 (3.36) 和 (3.47) 的界限在这里同样适用。